ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 г. Выпуск 1(60). С. 23-29

DOI: 10.17816/byusu20210123-29
УДК 512.81

П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С МЕТРИКОЙ СОЛИТОНА РИЧЧИ

Полусимметрические связности впервые открыты Э.Картаном и являются естественным обобщением связности Леви-Чивиты. Свойства параллельного переноса таких связностей и основные тензорные поля исследовались И.Агриколой, К.Яно и другими математиками. В настоящей работе построена математическая модель для изучения полусимметрических связностей на трехмерных группах Ли с метрикой инвариантного солитона Риччи. Получена классификация данных связностей на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой солитона Риччи. Доказано, что в этом случае существуют нетривиальные инвариантные полусиметрические связности. Ранее авторами проводились аналогичные исследования в классе эйнштейновых метрик.

Ключевые слова: полусимметрические связности, инвариантные солитоны Риччи, группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, математическое моделирование.

P. N. Klepikov, E. D. Rodionov, O. P. Khromova

MATHEMATICAL MODELING IN THE STUDY OF SEMISYMMETRIC CONNECTIONS ON THREE-DIMENSIONAL LIE GROUPS WITH THE METRIC OF THE RICCI SOLITON

Semisymmetric connections were first discovered by E. Cartan and are a natural generalization of the Levi-Civita connection. The properties of the parallel transfer of such connections and the basic tensor fields were investigated by I. Agrikola, K. Yano and other mathematicians. In this paper, a mathematical model is constructed for studying semisymmetric connections on three-dimensional Lie groups with the metric of an invariant Ricci soliton. A classification of these connections on three-dimensional unimodular Lie groups with left-invariant Riemannian metric of the Ricci soliton is obtained. It is proved that in this case there are nontrivial invariant semisimetric connections. Previously, the authors carried out similar studies in the class of Einstein metrics.

Key words: semi-symmetric connections, invariant Ricci solitons, Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, mathematical modeling.

1. Введение и основные результаты

Актуальным направлением в исследовании римановых многообразий малой размерности является математическое моделирование, создание и применение алгоритмов для нахождения тензорных полей на римановых многообразиях с целью изучения последних. В этом направлении известны многие результаты [1–12]. Целью данной работы является описание алгоритма, который позволит изучить вопрос о нахождении полусимметрических связностей на трехмерных группах Ли с метрикой инвариантного солитона Риччи. В результате будет дана классификация данных связностей на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой солитона Риччи, а также показано, что в этом случае существуют нетривиальные инвариантные полусиметрические связности. Ранее авторами проводились аналогичные исследования в классе эйнштейновых метрик [13,14]. Более подробно.

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [1], и называется метрической связностью с векторным кручением или полусимметрической связностью.

Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [1–10]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad r(X, Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X, Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема (см. [9,10])

Теорема 1. Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π, определяемая равенством $\pi(X) = g(X, V)$ для любого векторного поля X на M, замкнута, т.е. $d\pi = 0$.

Определение 1. Метрика g полного риманова многообразие (M, g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda g + L_P g, \quad (1)$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ и поле P левоинвариантно — инвариантным солитоном Риччи. Более того, инвариантный солитон Риччи называется тривиальным, если $L_P g(Y, Z) = \tau \cdot g(Y, Z)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$, и любых $Y, Z \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G.

Замечание. Векторное поле V неявно входит в уравнение (2), а в случае $V = 0$ мы получаем классическое определение солитона Риччи. Заметим также, что производная Ли имеет вид: $L_P g(X, Y) = P g(X, Y) + g([X, P], Y) + g(X, [Y, P])$. Более того, если солитон Риччи инвариантен, то $L_P g(X, Y) = g([X, P], Y) + g(X, [Y, P])$ для произвольных инвариантных полей X и Y.

Отметим, что в случае связности Леви-Чивиты инвариантные солитоны Риччи исследовались в работах [11–12], где была доказана

Теорема 2. Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинваринтной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.

Замечание. В неунимодулярном случае аналогичный результат до размерности четыре включительно получен П.Н.Клепиковым и Д.Н.Оскорбиным [12].

Определение 2. Полусимметрическая связность на римановом многообразии (M, g) называется тривиальной, если векторное поле V, определяющее эту связность, равно нулю.

Основным результатом данной работы является получение искомого алгоритма и доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть (G, g, ∇) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы и полусимметрические связности на них, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.

2. Построение алгоритма

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $e_1, \ldots, e_n$ левоинваринтных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на G метрическую связность ∇ с векторным кручением.

Тогда компоненты связности ∇ определяются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij}V^k - g_{sj}V^s\delta_i^k,$$

где $(\Gamma^g)_{ij}^s = \frac{1}{2}g^{ks}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$ — компоненты связности Леви-Чивита ∇^g, $\|g^{ks}\|$ — матрица обратная к $\|g_{ks}\|$, δ_i^k — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r. В базисе $e_1, \ldots, e_n$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p\right) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Пусть P — левоинвариантное векторное поле. Тогда (1) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k(c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}), \quad (2)$$

где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, P^k— координаты левоинвариантного векторного поля, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $(G, \mathfrak{g}, V)$ задана метрической группой Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и векторным полем V, определяющим связность. Справедливо следующее утверждение

Лемма 1. Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняется соотношение

$$V^i g_{ij} c^j_{kt} = 0 \quad (3)$$

или в инвариантной форме

$$g\left(V, [X, Y]\right) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c^j_{kt} — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = c^j_{kt} e_j$.

Доказательство. Если $(G, \mathfrak{g}, V)$ удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в силу (1) тензор Риччи должен быть симметричен. Тогда по теореме 1 необходимо $d\pi = 0$, т.е. для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ выполняется

$$2d\pi(X, Y) = X\pi(Y) - Y\pi(X) - \pi([X, Y]) = -2\pi([X, Y]) = -2g\left([X, Y], V\right) = 0.$$

Фиксируя некоторый базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, из данного равенства получаем (3).

Лемма 2. Инвариантный солитон Риччи тривиален тогда и только, когда выполняется

$$P^k(c^s_{ki} g_{sj} + c^s_{kj} g_{si}) = \tau g_{ij}.$$

Следующая классификация для трехмерных метрических групп Ли была получена Дж. Милнором в [15].

Теорема 4. Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1.$$

3. Доказательство теоремы

В данном разделе для доказательства теоремы 3 рассмотрим систему уравнений (2) для определения инвариантных солитонов Риччи, систему уравнений (3) для определения симметричности тензора Риччи, а также систему уравнений (4) для определения тривиальности солитона Риччи. Заметим, что в силу тензорного вида левой и правой частей уравнения (3) все вычисления достаточно провести для базиса Дж.Милнора. Рассуждения проведем для унимодулярной группы Ли G, что будет достаточным для доказательства теоремы 3.

Условие (3) имеет вид $V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2\alpha_2 = 0, \quad V^3\alpha_3 = 0$, поэтому имеет место один из следующих случаев

(i) $V = (0, 0, 0)$;

(ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;

(iii) $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;

(iv) $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;

(v) $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$;

(vi) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$;

(vii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$;

(viii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

С точностью до переобозначения базисных векторов интерес представляют только случаи (i), (ii), (v) и (viii).

(i) В данном случае вектор V тривиален и полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты. При этом решениями системы уравнений (2) являются следующие тривиальные солитоны

1. $\Lambda = \frac{1}{2}\alpha_3^2$, $\tau = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $V = (0,0,0)$, $P = (P^1,\ P^2,\ P^3)$.
2. $\Lambda = 0$, $\tau = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $V = (0,0,0)$, $P = (P^1,\ 0,\ 0)$.
3. $\Lambda = 0$, $\tau = 0$, $\alpha_1 = \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 0$ $V = (0,0,0)$, $P = (0,\ P^2,\ 0)$.
4. $\Lambda = 0$, $\tau = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 = 0$, $V = (0,0,0)$, $P = (0,\ 0,\ P^3)$.

(ii) В этом случае $V = (V^1, 0, 0)$, $V^1 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда системы уравнений (2) и (4) примут вид

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}V^1(\alpha_2 - \alpha_3) = P^1(\alpha_2 - \alpha_3),\\
&\tfrac{1}{2}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) - (V^1)^2 = \Lambda^2,\\
&\tfrac{1}{2}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - (V^1)^2 = \Lambda^2, \qquad (5)\\
&\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = -\Lambda,\\
&0 = P^2\alpha_3,\\
&0 = P^3\alpha_2,\\
&0 = \tau,
\end{aligned}$$

и

$$P^1(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, \quad P^2\alpha_3 = 0, \quad P^3\alpha_2 = 0.$$

Решением системы равенств (5) является

$$\Lambda = -(V^1)^2,\ \tau = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -\alpha_3,\ \alpha_3 = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}V^1,\ V = (V^1, 0, 0),\ P = (\tfrac{V^1}{2},\ 0,\ 0).$$

Очевидно, что оно не удовлетворяет (6), поскольку в рассматриваемом случае $V^1 \neq 0$. Таким образом, найденный солитон нетривиален.

(iii) и (iv) Данные случаи рассматриваются аналогично (ii). Соответствующие нетривиальные солитоны имеют вид

1. $\Lambda = -(V^2)^2$, $\alpha_1 = -\alpha_3$, $\alpha_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}V^2$, $\alpha_2 = \tau = 0$, $V = (0, V^2, 0)$, $P = (0,\ \frac{V^2}{2},\ 0)$;
2. $\Lambda = -(V^3)^2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}V^3$, $\alpha_3 = \tau = 0$, $V = (0, 0, V^3)$, $P = (0,\ 0,\ \frac{V^3}{2})$;

где $V^2 \neq 0$ и $V^3 \neq 0$ соответственно.

(v) Пусть теперь $V = (V^1, V^2, 0)$, $V^1V^2 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид
$\frac{1}{2}V^1\alpha_3 = P^1\alpha_3,$
$\frac{1}{2}V^2\alpha_3 = P^2\alpha_3,$
$V^1V^2 = 0,$
$\frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 = \Lambda,$
$\frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = -\Lambda,$
$\frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^2)^2 = -\Lambda,$
$0 = \tau.$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^1V^2 \neq 0$.

(vi) и (vii) Рассуждениями аналогичными (v), заключаем что в данных случаях инвариантных солитонов Риччи не существует.

(viii) Пусть теперь $V = (V^1, V^2, V^3)$ $V^1V^2V^3 \neq 0$ и $\alpha_1 = \tau = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда системы уравнений (2) примет вид $V^2V^3 = 0$,
$V^1V^3 = 0,$
$V^1V^2 = 0,$
$(V^1)^2 + (V^2)^2 = -\Lambda,$
$(V^1)^2 + (V^3)^2 = -\Lambda,$
$(V^2)^2 + (V^3)^2 = -\Lambda,$
$0 = \tau.$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^1V^2V^3 \neq 0$.

4. Заключение.

В работе изучен класс полусимметрических метрических связностей, которые включают в себя связность Леви-Чивиты и порождают обобщение теории солитонов Риччи, а также общей теории относительности А. Эйнштейна. Построена математическая модель для изучения полусимметрических связностей на трехмерных группах Ли с метрикой инвариантного солитона Риччи. Данная математическая модель допускает реализацию в средах универсальных математических систем и может быть использована для изучения метрических связностей на группах Ли малой размерности (см., например, [16, 17]).

Литература

1. Cartan, E. Sur les variétés `a connexion affine et la thèorie de la relativité généralisée (deuxième partie) / E. Cartan // Annales Scientifiques de lÉcole Normale Supérieure. - 1925. - Vol. 42. - P. 17-88.
2. Yano, K. On semi-symmetric metric connection / K. Yano // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees. 1970. - Vol. 15. - P. 1579-1586.
3. Agricola, I. Manifolds with vectorial torsion / I. Agricola, M. Kraus // Differential Geometry and its Applications. 2016. - Vol. 46. - P. 130-147.
4. Muniraja, G. Manifolds Admitting a Semi-Symmetric Metric Connection and a Generalization of Schur's Theorem // International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. - 2008. - Vol. 25, Is. 3. - P. 1223-1232.
5. Agricola, I. The Geodesics of Metric Connections with Vectorial Torsion / I. Agricola, C. Thier // Annals of Global Analysis and Geometry. - 2004. - Vol. 26. - P. 3211-332.

6. Родионов, Е. Д. О секционной кривизне метрических связностей с векторным кручением / Е. Д. Родионов, В. В. Славский, О. П. Хромова. - Текст : непосредственный // Известия АлтГУ. - 2020. - № 1. - С. 124-127.
7. Yilmaz, H. B. On a Semi Symmetric Metric Connection with a Special Condition on a Riemannian Manifold / H. B. Yilmaz, F. O. Zengin, S. A. Uysal // European journal of pure and applied mathematics. - 2011. - Vol. 4, Is. 2. - P. 152-161.
8. Zengin, F. O. Some vector fields on a riemannian manifold with semi-symmetric metric connection / F. O. Zengin, S. A. Demirbag, S. A. Uysal [et al.] // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. - 2012. - Vol. 38, Is. 2. - P. 479-490.
9. Barua, B. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold / B. Barua, A. Kr. Ray // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. - 1985. - Vol. 16, Is. 7. - P. 736-740.
10. De, U. C. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold / U. C. De, B. K. De // Istanbul Universitesi Fen Fak?ltesi Mat. Der. - 1995. - Vol. 54. - P. 111-117.
11. Di Cerbo, L. Generic properties of homogeneous Ricci solitons / L. Di Cerbo // Advances in Geometry. - 2014. - Vol. 14, Is. 2. - P. 225-237.
12. Клепиков, П. Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли / П. Н. Клепиков, Д. Н. Оскорбин. - Текст : непосредственный // Известия АлтГУ. - 2015. - Т. 1, № 2. - С. 115-122.
13. Клепиков, П. Н. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением / П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова. - Текст : непосредственный // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. - 2020. - Т. 181, № 3. - С. 41-54.
14. Клепиков, П. Н. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением / П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова. - Текст : непосредственный // Математические заметки СВФУ. - 2019. - Т. 26, № 4. - С. 25-36.
15. Milnor, J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups / J. Milnor // Advances in Mathematics. - 1976. - Vol. 21. - P. 293-329.
16. Программный комплекс для определения секционной кривизны метрических групп Ли : свидетельство о регистрации программы для ЭВМ : № 2020614218 : заявл. 23.03.2020 : опубл. 27.03.2020 / Хромова О. П. - Текст : электронный // ЭБС АлтГУ. - URL: http://elibrary.asu.ru/xmlui/handle/asu/10158?show=full (дата обращения: 10.04.2021).
17. Программный комплекс для нахождения инвариантных тензорных полей конечномерных групп Ли : свидетельство о регистрации программы для ЭВМ : № 2014612649 : заявл. 14.10.2013 : опубл. 20.03.2014 / Оскорбин Д. Н., Хромова О. П. - Текст : электронный // ЭБС АлтГУ. - URL: http://elibrary.asu.ru/handle/asu/7432 (дата обращения: 10.04.2021).