ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 г. Выпуск 1(60). С. 17-22

DOI: 10.17816/byusu20210117-22
УДК 514.742.4

Т. А. Андреева, Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЯТИМЕРНЫХ 2-СИММЕТРИЧЕСКИХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Конформно киллинговы поля играют важную роль в теории солитонов Риччи, а также порождают важный класс локально конформно однородных (псевдо)римановых многообразий. В римановом случае В. В. Славским и Е. Д. Родионовым было доказано, что такие пространства являются либо конформно плоскими, либо конформно эквивалентны локально однородным римановым многообразиям. В псевдоримановом случае вопрос их строения остается открытым. Псевдоримановы симметрические пространства порядка k, где $k > 2$, играют важную роль в исследованиях по псевдоримановой геометрии. В настоящее время они исследованы в случаях $k = 2, 3$ Д. В. Алексеевским, А. С. Галаевым и другими. Для произвольного k известны нетривиальные примеры таких пространств: обобщенные многообразия Кахена-Уоллаха. В случае малых размерностей эти пространства и векторные поля Киллинга на них изучались Д. Н. Оскорбиным, Е. Д. Родионовым и И. В. Эрнстом с помощью систем компьютерной математики. В данной работе с помощью СКМ Sagemath исследованы конформно киллинговы векторные поля на пятимерных неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразиях, построен алгоритм для их вычисления.

Ключевые слова: конформно киллинговы векторные поля, лоренцевы многообразия, k-симметрические пространства.

T. A. Andreeva, D. N. Oskorbin, E. D. Rodionov

INVESTIGATION OF CONFORMALLY KILLING VECTOR FIELDS ON 5-DIMENSIONAL 2-SYMMETRIC LORENTZIAN MANIFOLDS

Conformally Killing fields play an important role in the theory of Ricci solitons and also generate an important class of locally conformally homogeneous (pseudo) Riemannian manifolds. In the Riemannian case, V.V. Slavsky and E.D. Rodionov proved that such spaces are either conformally flat or conformally equivalent to locally homogeneous Riemannian manifolds. In the pseudo-Riemannian case, the question of their structure remains open. Pseudo-Riemannian symmetric spaces of order k, where $k > 2$, play an important role in research in pseudo-Riemannian geometry. Currently, they have been investigated in cases $k = 2, 3$ by D.V. Alekseevsky, A.S. Galaev and others. For arbitrary k, non-trivial examples of such spaces are known: generalized Kachen - Wallach manifolds. In the case of small dimensions, these spaces and Killing vector fields on them were studied by D.N.Oskorbin, E.D. Rodionov, and I.V. Ernst with the help of systems of computer mathematics. In this paper, using the Sagemath SCM, we investigate conformally Killing vector fields on five-dimensional indecomposable 2-symmetric Lorentzian manifolds, and construct an algorithm for their computation.

Key words: conformally Killing vector fields, Lorentzian manifolds, k-symmetric spaces.

1. Обозначения и факты.

Определение. *Псевдоримановым многообразием* называется гладкое многообразие $\mathcal{M}$, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n-1)$, то $(\mathcal{M}, g)$ называется *лоренцевым многообразием*.

Определение. Псевдориманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется симметрическим порядка k, если

$$\nabla^k R = 0, \quad \nabla^{k-1} R \neq 0,$$

где $k \geq 1$ и R — тензор кривизны (M, g), а ∇ — связность Леви-Чивиты.

Для римановых многообразий из условия $\nabla^k R = 0$ вытекает $\nabla R = 0$. Однако лоренцевы k-симметрические пространства существуют при всех $k \geq 2$.

Локально неразложимые 1-симметрические лоренцевы многообразия описаны Кахеном и Уоллахом в [1], 2-симметрические лоренцевы многообразия исследованы в работах [2,3,4]. Отметим, что они являются многообразиями Уокера [5,6].

Определение. Гладкое векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии $(\mathcal{M}, g)$ называется *полем Киллинга*, если выполняется равенство

$$L_K g = 0, \tag{1}$$

где $L_K g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля K.

Определение. Гладкое векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии $(\mathcal{M}, g)$ называется *конформно киллинговым* векторным полем, если выполняется равенство

$$L_K g = f(p) g, \tag{2}$$

где $L_K g$ — производная Ли метрического тензора вдоль поля K, $p \in \mathcal{M}$, а $f(p)$ — гладкая вещественная функция на многообразии.

Из теоремы Ву (см. [7]) следует, что любое лоренцево многообразие локально может быть представлено в виде прямого произведения некоторого риманова многообразия $(\mathcal{M}_1, g_1)$ и локально неразложимого лоренцева многообразия $(\mathcal{M}_2, g_2)$. Все рассматриваемые далее лоренцевы многообразия предполагаются локально неразложимыми.

С помощью теоремы А.С. Галаева и Д.В. Алексеевского (см. [2]) можно выбрать систему локальных координат (v, x^1, x^2, x^3, u) на $\mathcal{M}$, где $(\mathcal{M}, g)$ — неразложимое лоренцево пятимерное многообразие, такую, что

$$\begin{aligned} g = 2du dv + \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 + \Big(& H_{110}(x^1)^2 \\ & + 2H_{120} x^1 x^2 + 2H_{130} x^1 x^3 + H_{220}(x^2)^2 \\ & + 2H_{230} x^2 x^3 + H_{330}(x^3)^2 + \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 u H_{ii1} \Big) du^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где H_{ii1} — ненулевые действительные числа, а H_{ij0} — произвольные константы.

2. Основной алгоритм.

В решении задачи о нахождении общего решения уравнения конформно киллингова поля на пятимерных локально неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразиях можно выделить следующие основные этапы:

1) запись уравнения $L_X g = f(p)g$ для определения комфорно киллингова поля в локальных координатах Д.В. Алексеевского - А.С. Галаева;

2) нахождение частного решения уравнения $L_X g = f(p)g$;

3) построение общего решения с помощью уравнения для нахождения полей Киллинга.

Более подробно:

1) Уравнение конформно киллингова векторного поля в локальных координатах на пятимерном 2-симметрическом неразложимом лоренцевом многообразии с метрикой (3) примет вид системы дифференциальных уравнений (4)

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{dX_2}{dx^1}=0, & 2\frac{dU}{dv}=0,\\
\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx^3}+\frac{1}{2}\frac{dX_3}{dx^1}=0, & -f+\frac{dX_j}{dx^j}=0,\\
\frac{1}{2}\frac{dX_2}{dx^3}+\frac{1}{2}\frac{dX_3}{dx^2}=0, & \frac{dU}{dx^j}+\frac{1}{2}\frac{dX_j}{dv}=0,
\end{array}
$$

$$
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_{ii1}u+H_{ii0})(x^i)^2\frac{dU}{dv}+H_{120}x^1x^2\frac{dU}{dv}+
$$

$$
+\Big(H_{130}x^1\frac{dU}{dv}+H_{230}x^2\frac{dU}{dv}\Big)x^3-2f+\frac{dU}{du}+\frac{dV}{dv}=0,
$$

$$
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_{ii1}u+H_{ii0})(x^i)^2\frac{dU}{dx^j}+H_{120}x^1x^2\frac{dU}{dx^j}+
$$

$$
+\Big(H_{130}x^1\frac{dU}{dx^j}+H_{230}x^2\frac{dU}{dx^j}\Big)x^3+\frac{dV}{dx^j}+\frac{1}{2}\frac{dX_2}{du}=0,
$$

$$
-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Big(2H_{ii1}fu+2H_{ii0}f-H_{ii1}U-2(H_{ii1}u+H_{ii0})\frac{dU}{du}\Big)(x^i)^2+
$$

$$
+\Big((H_{111}u+H_{110})X_1+H_{120}X_2+H_{130}X_3-\Big(2\Big(H_{120}f-H_{120}\frac{dU}{du}\Big)x^1-
$$

$$
-H_{120}X_1u\Big)-(H_{221}u+H_{220})X_2-H_{230}X_3\Big)x^2-\Big(2\Big(H_{130}f-H_{130}\frac{dU}{du}\Big)x^1+
$$

$$
+2\big(H_{230}f-H_{230}X_2-(H_{331}u+H_{330})X_3\big)\Big)x^3+2\frac{dV}{du}=0,
$$

где H_{ii1} — ненулевые действительные числа, H_{ij0} — произвольные константы, а $V(v,x^1,x^2,x^3,u)$, $X_i(v,x^1,x^2,x^3,u)$, $U(v,x^1,x^2,x^3,u)$ — компоненты векторного поля K $(i=1,2,3)$.

2) Для системы уравнений (4) построим частное решение.

Теорема 1. *Векторное поле*

$$
K=(2fv+c)\frac{d}{dv}+fx^1\frac{d}{dx^1}+fx^2\frac{d}{dx^2}+fx^3\frac{d}{dx^3},
$$

где c, f — некоторые постоянные, на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии $\mathcal{M}$ с метрикой (3) является конформно киллинговым.

Доказательство. *В локальных координатах Д.В. Алексеевского - А.С. Галаева проверим справедливость системы уравнений (4) для поля K.*

Все уравнения, кроме последнего, очевидно, выполнены, последнее уравнение выполнено, так как после подстановки значений V, X_i, U и раскрытия всех скобок мы получаем:

$$\begin{aligned}&-H_{111}f(x^1)^2u - H_{110}f(x^1)^2 - H_{221}f(x^2)^2u - H_{220}f(x^2)^2 - H_{331}f(x^3)^2u-\\&-H_{330}f(x^3)^2 + H_{111}f(x^1)^2u + H_{110}f(x^1)^2 + H_{120}fx^1x^2+\\&+H_{130}fx^1x^3 - 2H_{120}fx^1x^2 + H_{120}fx^1x^2 + H_{221}f(x^2)^2u+\\&+H_{220}f(x^2)^2 + H_{230}fx^2x^3-2H_{130}fx^1x^3 - 2H_{230}fx^2x^3+\\&+H_{130}fx^1x^3 + H_{230}fx^2x^3 + H_{331}f(x^3)^2u + H_{330}f(x^3)^2 = 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3) Имеет место

Лемма. *Пусть (M, g) – (псевдо) риманово многообразие, K, P – конформно киллинговы векторные поля на M с константой $f \in R$. Тогда $K - P$ есть векторное поле Киллинга на M.*

Доказательство. *Действительно, вычитая почленно из равенства $L_Kg = fg$ равенство $L_Pg = fg$ получаем $L_{K-P}g = 0$.*

Следствие. *В условиях теоремы 1 пространство конформно киллинговых векторных полей может быть построено с помощью частного решения конформно киллингова уравнения и пространства полей Киллинга.*

Отметим, что неразложимые 2-симметрические лоренцевы многообразия являются пространствами Кахена-Уоллаха $\mathcal{CW}_d^{n+2}$ при $d = 1$, киллинговы векторные поля на которых изучались в работе [8]. Была доказана

Теорема 2. *Пусть X — векторное поле Киллинга с координатами $V(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $X_j(v, x^1, \dots, x^n, u)$, $U(v, x^1, \dots, x^n, u)$ (V,X_j, U — гладкие функции), на обобщенном многообразии Кахена-Уоллаха $(\mathcal{CW}_d^{n+2}, g)$ размерности $n + 2 \geq 4$, с метрикой*

$$g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u)x^ix^j)(du)^2,$$

где $a_{ij}(u) = H_{ij0} + H_{ij1}u$.

Общее решение уравнения Киллинга имеет вид:

$$\begin{cases} U = 0 \\ X_i = b_i(u) + f_{ik}x^k \\ V = -\dot{b}_i(u)x^i + c \end{cases},$$

где $c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа, функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений $\ddot{b}_i(u) = a_{ij}(u)b_j(u)$, (f_{ik}) — постоянная кососимметричная матрица, коммутирующая с $A = (a_{ij})$. Размерность пространства полей Киллинга не меньше $2n+1$ и не больше $2n + 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, используя следствие леммы, теорему 2 при $n = 3$, $d = 1$ и утверждение теоремы 1, получим.

Теорема 3. *Пусть X — конформно киллингово векторное поле с координатами $V(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $X_i(v, x^1, x^2, x^3, u)$, $U(v, x^1, x^2, x^3, u)$ (V, X^j, U — гладкие функции), на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии $\mathcal{M}$ с локально* *допустимой метрикой (3). Общее решение уравнения конформно киллингова поля имеет вид:*

$$\begin{cases} U = 0, \\ X_i = b_i(u) + f_{ik}x^k + fx^i, \\ V = -\dot{b}_i(u)x^i + 2fv + c, \end{cases}$$

где $c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа, функции $b_i(u)$ определяются системой дифференциальных уравнений $\ddot{b}_i(u) = a_{ij}(u)b_j(u)$, (f_{ik}) — постоянная кососимметричная матрица, коммутирующая с $A = (a_{ij})$, где $a_{ij}(u) = H_{ij0} + H_{ij1}u$. Размерность пространства полей Киллинга не меньше 8 и не больше 11.

Замечание. Поля Киллинга на 2-симметрических многообразиях размерности 4, 5 и 6 рассматривались в работе [9]. Кроме того, заметим, что конформно-киллинговы векторные поля на лоренцевых многообразиях до размерности 4 включительно рассматривались ранее, см., например, [10].

Заключение.

В результате проведенных исследований построен алгоритм для нахождения общего решения конформного аналога уравнения Киллинга на пятимерных локально неразложимых 2-симметрических лоренцевых многообразиях, изучено строение группы локально конформных преобразований таких пространств. Данные исследования найдут приложения при изучении потока Риччи на многообразиях, различных обобщениях теории многообразий А.Эйнштейна, а разработанные функции для СКМ Sagemath применимы при изучении тензорных полей на лоренцевых многообразиях малой размерности.

Литература

1. Cahen, M. Lorentzian symmetric spaces / M. Cahen, N. Wallach // Bulletin of the American Mathematical Society. - 1970. - Vol. 76. - P. 585-591.
2. Galaev, A. S. Two-symmetric Lorentzian manifolds / A. S. Galaev, D. V. Alexeevskii // Journal of Geometry and Physics. - 2011. - Vol. 61, № 12. - P. 2331-2340.
3. Blanco, O. F. Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds / O. F. Blanco, M. Sanchez, J. M. Senovilla // Journal of the European Mathematical Society. - 2013. - Vol. 15. - P. 595-634.
4. Galaev, A. S. Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications / A. S. Galaev, T. Leistner // European Mathematical Society. - 2008. - № 1. - P. 53-96.
5. Walker, A. G. On parallel fields of partially null vector spaces / A. G. Walker // Quarterly Journal of Mathematics. - 1949. - Vol. 20. - P. 135-145.
6. The geometry of Walker manifolds / M. Brozos-V?zquez, E. Garc?a-R?o, P. Gilkey [et al.] // Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. - 2009. - Vol. 2. - P. 1-179.
7. Wu, H. On the de Rham decomposition theorem / H. Wu // Illinois Journal of Mathematics. - 1964. - Vol. 8, Issue 2. - P. 291-311.
8. Oskorbin, D. N. Ricci solitons and killing fields on generalized Cahen-Wallach manifolds / D. N. Oskorbin, E. D. Rodionov // Siberian Mathematical Journal. - 2019. - V. 60, № 5. - P. 1165-1170.

9. Оскорбин, Д. Н. О размерностях пространства полей Киллинга на 2-симметрических лоренцевых многообразиях / Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов, И. В. Эрнст. - Текст : непосредственный // Математические заметки СВФУ. - 2019. - Т. 26, № 3. - С. 47-53.
10. Hall, G. S. Symmetries and Curvature Structure in General Relativity / G. S. Hall. - Hackensack : World Scientific Publishing Co, 2004. - 430 p.