ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 г. Выпуск 4 (47). С. 61–78

УДК 517.956

С. Г. Пятков

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Данная работа есть обзор недавних результатов, полученных преимущественно автором и его соавторами и посвященных исследованию обратных задач для некоторых математических моделей, в частности тех, что описывают процессы тепломассопереноса и конвекции-диффузии. Они задаются параболическими уравнениями и системами второго и высокого порядка. Мы рассматриваем два типа условий переопределения: решение задается на некотором наборе пространственных многообразий (или в отдельных точках) или задан некоторый набор интегралов от решения с весом. Мы исследуем обратную задачу восстановления правой части (функции источников) или коэффициентов уравнений, являющихся параметрами среды. Неизвестные (правая часть или коэффициенты уравнения) зависят от времени и части пространственных переменных. Главные результаты в линейном случае, т. е. мы восстанавливаем правую часть, являются глобальными по времени, в то же время они становятся локальными по времени в общем случае. Основные используемые функциональные пространства – пространства Соболева.

Ключевые слова: тепломассоперенос, ковекция, диффузия, краевая задача, обратная задача, существование, единственность, параболическая система.

S. G. Pyatkov

INVERSE PROBLEMS IN THE HEAT AND MASS TRANSFER THEORY

This article is a survey of the recent results obtained preferably by the author and its coauthors and devoted to the study of inverse problem for some mathematical models, in particular those describing heat and mass transfer and convection-diffusion processes. They are defined by second and higher order parabolic equations and systems. We examine the following two types of overdetermination conditions: a solution is specified on some collection of spatial manifolds (or at separate points) or some collection of integrals of a solution with weight is prescribed. We study an inverse problem of recovering a right-hand side (the source function) or the coefficients of equations characterizing the medium. The unknowns (coefficients and the right-hand side) depend on time and a part of the space variables. We expose existence and uniqueness theorems, stability estimates for solutions. The main results in the linear case, i.e., we recover the source function, are global in time while they are local in time in the general case. The main function spaces used are the Sobolev spaces.

Key words: heat and mass transfer, convection, diffusion, boundary value problem, inverse problem, existence, uniqueness, parabolic system.

Введение

Данная работа является обзорной. Мы опишем последние результаты, полученные в теории обратных задач для математических моделей тепломассопереноса и конвекции-диффузии (преимущественно установленных в работах автора), а также и для других моделей, описываемых в основном параболическими системами.

Одной из наиболее известных моделей является система (модель Обербека-Буссинеска, см. [1]–[4]):

$$u_t - \nu\Delta u + (u,\nabla)u + \nabla p = \vec{f} + \beta_C C + \beta_\Theta \Theta,\ divu = 0, \tag{1}$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta\Theta + u\nabla\Theta = f_\Theta, \tag{2}$$

$$C_t + u\nabla C - \omega_0 C_{x_n} + kC - \lambda_C \Delta C = f_C, \tag{3}$$

где первое уравнение – уравнение для вектора скорости u и давления p, второе – для температуры Θ, третье – для концентрации переносимого вещества C. Здесь λ_C – коэффициент диффузии, f_C –

объемная плотность источников (стоков), ω_0 – величина вертикальной скорости осаждения примеси, k – коэффициент распада вещества за счет химических реакций. Считаем, что $(x,t)\in Q=G\times(0,T)$, $G\subset R^n$ – область в R^n с границей Γ, $T<\infty$, $S=\Gamma\times(0,T)$.

В более сложных системах параболическое уравнение для концентраций заменяется на параболическую систему уравнений (см. [5]):

$$C_t+(u,\nabla)C-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}C_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_iC_{x_i}+a_0C=f_c, \tag{4}$$

В таких системах a_{ij}, a_i, a_0 – матрицы размерности $h\times h$, где h – это количество примесей, β_C – матрица размерности $n\times h$, β_Θ – вектор-функция длины n, $\lambda_\Theta>0$ – скалярная функция. Система (1), (2), (4) (и соответственно система (1)–(3)) дополняется граничными и начальными условиями:

$$u|_{t=0}=u_0,\ u|_S=g_1(t,x),\ \Gamma=\partial G, S=\Gamma\times(0,T), \tag{5}$$

$$T|_{t=0}=T_0,\ T|_S=g_2(t,x), \tag{6}$$

$$C|_{t=0}=C_0,\ BC=C|_S=g_3(t,x). \tag{7}$$

Последнее условие также может быть заменено на условие

$$C|_{t=0}=C_0,\ BC=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x,t)C_{x_i}+\sigma(t,x)u|_S=g_3(t,x). \tag{8}$$

где $\gamma_i(x,t),\sigma(x,t)\in C([0,T];C^1(\overline{\Gamma}))$ – матрицы размера $h\times h$. Система (1)–(3) (или (1), (2), (4)) может быть упрощена, если, например, считать, что вектор скорости течения задан (таким образом, мы убираем систему Навье-Стокса из рассмотрения), или рассматривать не многомерный случай, а двумерный или одномерный. В этом случае искомая модель сводится к параболической системе:

$$C_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}C_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_iC_{x_i}+a_0C=f_c(x,t). \tag{9}$$

С другой стороны, система может и усложняться, добавляются уравнения, описывающие гидрохимические и гидробиологические процессы в жидкости, например, рост и размножение водорослей, процессы таяния ледяного покрова и т. п. Классической является обратная задача определения вместе с решением системы (1)–(3) (или систем (1), (2), (4) и (9)) еще и функции источников f_c специального вида, характеризующей расположение источников (стоков) и их интенсивность. Кроме правой части (функции источников) определению часто подлежат и коэффициенты уравнения, являющиеся параметрами среды. В случае обратных задач соответствующие уравнения и системы дополняются, кроме граничных и начальных данных, еще и дополнительными данными – условиями переопределения. Мы будем дополнительно задавать значения решения на некоторых пространственных многообразиях или интегралы от решения с весами. Вместо системы (9) можно также рассмотреть и более общие системы вида

$$C_t+A(t,x,D)C=f_c,\ (t,x)\in Q, \tag{10}$$

где A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h\times h$, представимый в виде $A(t,x,D)=\sum_{|\alpha|\le 2m}a_{i\alpha}(t,x)D^\alpha, D=(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\dots,\partial_{x_n})$.

Уравнение (10) дополняется начальными и граничными условиями:

$$C|_{t=0}=u_0,\ B_jC|_S=\sum_{|\beta|\le m_j}b_{j\beta}(t,x)D^\beta C|_S=g_j(t,x), \tag{11}$$

где $m_j < 2m$, $j = 1,2,...,m$ и $S = \Gamma \times (0,T)$. Неизвестными в (10), (11) являются решение C, функции $q_i(t,x')$ ($i = 1,2,...,r$), входящие как в правую часть (10), так и в оператор A как коэффициенты, где $x = (x',x'')$, $x' = (x_1,x_2,...,x_k)$, $x'' = (x_{k+1},x_{k+2},...,x_n)$ (таким образом, мы считаем, что неизвестные функции q_i зависят только от части переменных). Интегральные условия переопределения, которые мы будем рассматривать, имеют вид:

$$\int_{G_j} \phi_j(x)C(x,t)\,dx = \psi_j(t),\ j = 1,2,...,s, \tag{12}$$

где $\phi_j(x), \psi_j(t)$ – некоторые гладкие функции, условия на которые мы уточним ниже и $G_i \subset G$ некоторые области. Условия переопределения с данными на пространственных многообразиях имеют вид:

$$C|_{S_i} = \psi_i(x',t)\ (S_i = (0,T)\times\Gamma_i,\ i = 1,2,...,s), \tag{13}$$

где $\{\Gamma_i\}$ – набор гладких k-мерных поверхностей, лежащих в G (например, это сечения области плоскостями, в том числе в общую схему вкладывается и случай, когда вместо поверхностей берутся точки, лежащие в G). Мы ищем правую часть в виде $f_c = f_0(x,t) + \sum_{i=1}^{r} q_i(x',t) f_i(x,t)$, где неизвестными являются функции $q_i(x',t)$, не зависящие от части переменных. При $k = 0$, т. е. $x'' = x$, неизвестные функции q_i зависят только от t. Точечные условия переопределения имеют вид:

$$C|_{x=x_i} = \psi_i(t),\ i = 1,2,...,s. \tag{14}$$

Некоторые обозначения и определения

Пусть E – банахово пространство. Обозначим через $L_p(G;E)$ (G область R^n) пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\|\,\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ (см., например, [6]). Также используются пространства $C^k(\overline{G};E)$, состоящие из функций, обладающих всеми производными до k включительно, непрерывных и ограниченных в G, имеющих непрерывное продолжение на $\overline{G}$. Пространства Соболева $W_p^k(G;E)$, $W_p^k(Q;E)$ определены стандартным образом (см. [6–9]). Если $E = C$ или $E = C^n$, то используется обозначение $W_p^k(G)$, или $C^k(\overline{G})$. Принадлежность $u \in W_p^k(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для заданной вектор-функции $u = (u_1,u_2,...,u_k)$ означает, что каждая компонента u_i принадлежит $W_p^k(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). Норма в соответствующем пространстве – сумма норм координат, если не указано противное. Аналогичное соглашение примем для матриц, что принадлежность $a \in W_p^k(G)$ ($a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$) означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^k(G)$ для всех i,j. Для заданного интервала $J = (0,T)$, положим, $W_p^{k,r}(Q) = W_p^r(J;L_p(G)) \cap L_p(J;W_p^k(G))$ и $W_p^{k,r}(S) = W_p^r(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p(J;W_p^k(\Gamma))$. Обозначим через $L_{p,\sigma}(G)$ замыкание соленоидальных C_0^∞ – вектор-функций по норме $L_p(G)$ и положим, $W_{p,\sigma}^k(G) = W_p^k(G) \cap L_{p,\sigma}(G)$ и $W_{p,\sigma}^{k,k/2}(Q) = W_p^{k,k/2}(Q) \cap L_p(0,T;L_{p,\sigma}(G))$ ($k \geq 0$). Символ $\overset{\circ}{W}{}_q^k(G)$ обозначает замыкание $C_0^\infty(G)$ по норме пространства $W_q^k(G)$ и $\dot{W}_q^1(G) = \{p \in L_{q,loc}(G) : \nabla p \in L_q(G)\}$. Мы отождествляем функции, отличающиеся на константу и вводим в этом пространстве норму $\|p\|_{\dot{W}_q^1(G)} = \|\nabla p\|_{L_q(G)}$. Обозначение $\nabla_{x''} f(x,t)$ используется для записи вектор-функции $(\partial_{x_{k+1}} f, \partial_{x_{k+2}} f, ..., \partial_{x_n} f)$, где символ ∂_{x_k} обозначает частную производную $\frac{\partial}{\partial x_k}$. Рассмотрим систему (10), т. е.

$$C_t + A(x,t,D)C = f,\ AC = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(t,x) D^\alpha C, \tag{15}$$

где $(x,t)\in Q = G\times(0,T)$, G – область в R^n с границей Γ класса C^{2m} (определение областей с границами класса C^{β} может быть найдено, например в [17]). К уравнению (1) добавим начальные и краевые условия:

$$C\,|_{t=0} = C_0(x), B_j C\,|_S = g_j(t,x),\ B_j C = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{j\alpha}(x,t)D^{\alpha}u\ (m_j < 2m). \tag{16}$$

Положим, $A_0 = \sum_{|\alpha|=2m} a_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}$, $B_{j0} = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}D^{\beta}$ Говорим, что оператор $\partial_t + A$ параболичен, если найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена

$$\det(A_0(x,t,i\xi) + pE) = 0. \tag{17}$$

(E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} p \le -\delta_1 |\xi|^{2m},\ \forall\xi\in R^n, \forall(x,t)\in Q. \tag{18}$$

Говорим, что выполнено условие Лопатинского для задачи (15), (16), если: для любой точки $(t_0, x_0)\in S$ система

$$(\lambda E + A_0(x_0,t_0,i\xi',\partial_{y_n}))v(z) = 0\ \ B_{j0}(x_0,t_0,i\xi',\partial_{y_n})v(0) = h_j, \tag{19}$$

($\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$, $y_n\in R^+$, $j = 1,2,\ldots,m$) имеет единственное решение из $C(\overline{R^+};E)$ ограниченное на бесконечности для всех $\xi'\in R^{n-1}$, $|\arg\lambda|\le\pi/2$ и $h_j\in C^h$ таких что $|\xi'| + |\lambda| \ne 0$, где операторы $A_0(x_0,t_0,D), B_{j0}(x_0,t_0,D)$ записаны в локальной системе координат y (ось y_n направлена по нормали к S в точке (x_0,t_0), а оси $y_1,\ldots,y_{n-1}$ расположены в касательной плоскости в этой точке).

Алгебраические условия, гарантирующие выполнение (19), могут быть найдены, например, в [17].

Постановка задачи и основные результаты для системы (1), (2), (4)

Мы рассматриваем систему (1), (2), (4), где правая часть (4) имеет вид $f_c = f_0(x,t) + \sum_{i=1}^{r} f_i(x,t)q_i(x',t)$. Пусть G_1 и G_0 или непустые непересекающиеся области такие, что $\overline{G_0}\cup\overline{G_1} = \overline{G}$, или $G_1 = \varnothing$. Положим, $Q' = G_1\times(0,T)$, $Q'' = G_0\times(0,T)$, в случае $G_1 = \varnothing$ полагаем $Q'' = Q$. Считаем, что функции f_i, $(i = 0,1,\ldots,r)$ известны, и при $i\ge 1$ функции f_i обращаются в ноль на множестве Q'. При $k = 0$ поверхности Γ_i есть просто точки, лежащие в G_0, берем $G_0 = G$ или G_0 есть некоторая окрестность объединения этих точек. В этом параграфе мы предполагаем, что все функциональные пространства и коэффициенты рассматриваемой системы вещественны.

Требуется определить неизвестные функции q_i ($i = 1,2,\ldots,r$) и решение u, Θ, C системы (1), (2), (4), удовлетворяющее начально-краевым условиям (5)–(7) и данным переопределения (13).

Ранее обратные задачи различных типов для системы Навье-Стокса исследовались в ряде работ Прилепко А. И. и других авторов. Результаты и библиография могут быть найдены в монографии [10] (см. также [11]). Обратные задачи для системы Обербека-Буссинеска и более общих систем в нестационарном случае не исследовались. В стационарном случае было исследовано большое количество задач управления (см., например, [12] и [13]). Приведенные ниже результаты опубликованы в работах [14]–[16].

Считаем, что граница Γ области G принадлежит классу C^2. Запишем условия на область G_0 и поверхности Γ_i.

(A). а) случай $k > 0$. Имеется область $\Omega\subset R^k$ с границей класса C^2, такая, что $G_0\subset\Omega\times R^{n-k}$,

$$\Gamma_i = \{x\in R^n : x'' = \phi^i(x') = (\phi^i_{k+1}(x'), \phi^i_{k+2}(x'),\ldots,\phi^i_n(x')), x'\in\Omega\},$$

$\phi^i(x')\in C^2(\overline{\Omega})$ и существует константа $\delta>0$ такая, что

$$U_{\delta i}=\{(x',\phi^i(x')+\eta): x'\in\Omega, \eta\in R^{n-k}, |\eta|<\delta\}\subset G_0,$$

для $i=1,2,\dots,s,$ и $U_{\delta i}\cap U_{\delta j}=\varnothing,$ для $i\neq j$, $i,j=1,2,\dots,s$;

б) случай $k=0$. В этом случае в качестве множеств $\{\Gamma_i\}_{i=1}^s$ берем внутренние точки $\{x_i\}_{i=1}^s$ области G_0. Положим, $U_{\delta i}=B_\delta(x_i)$ и выберем число $\delta>0$ такое, что $\overline{U_{\delta i}}\subset G_0$ и $U_{\delta i}\cap U_{\delta j}=\varnothing$ для $i\neq j$, $i,j=1,2,\dots,s$.

Условие (А) используется во всех статьях, посвященных данным задачам. Как легко увидеть, оно гарантирует единственность решений. Условие (А) выполнено, если $G_0=G=\Omega\times R^{n-s}$, где Ω – ограниченная или неограниченная область класса C^2.

В дальнейшем мы используем следующие обозначения: $Q^\tau=(0,\tau)\times G$, $Q_0=(0,T)\times\Omega$, $Q_0^\tau=(0,\tau)\times\Omega$, $G_\delta=\cup_i U_{\delta i}$, $Q_\delta=(0,T)\times G_\delta$ и $Q_\delta^\tau=(0,\tau)\times G_\delta$, и считаем в этом параграфе, что $\rho(U_{\delta i},G\ , \ \ G_0)>0$ при *i=1,2,...,s.*

Приведем условия на данные задачи. Всюду ниже считаем, что $q>n+2$.

Условия согласования и гладкости могут быть записаны в следующей форме: существуют вектор-функции Φ_1, Φ_3 и функция Φ_2 такие, что

$$\Phi_i(t,x)\in W_q^{2,1}(Q):\Phi_1|_{t=0}=u_0, \Phi_2|_{t=0}=\Theta_0, \Phi_3|_{t=0}=C_0, \Phi_i|_S=g_i, \tag{20}$$

$$\operatorname{div}\Phi_1=0, \Phi_3|_{S_j}=\psi_j,\ f_0, f_\theta, f\in L_q(Q),\ f_j\in L_\infty(Q), \tag{21}$$

$$\nabla_{x''}\Phi_3\in W_q^{2,1}(Q_\delta),\ \nabla_{x''}f_0\in L_q(Q_\delta),\ \nabla_{x''}f_j\in L_\infty(Q_\delta), \tag{22}$$

где $j=1,2,\dots,r$, $i=1,2,3$ и δ – постоянная из условия (А).

Определим матрицу B следующим образом: строки с номерами от $(i-1)h+1$ до ih $(i=1,2,\dots,s)$ занимают векторы-столбцы $\left[f_1(x',\phi^i(x'),t), f_2(x',\phi^i(x'),t),\dots,f_r(x',\phi^i(x'),t)\right]$.

Полагаем, что существуют постоянные $\delta_0,\delta_1>0$ такие, что

$$|\det B|\geq\delta_0>0 \quad \text{п.в. в } Q. \tag{23}$$

Также будем считать, что существует константа >0 такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j)\geq\delta_1\sum_{i=1}^h\|\xi^i\|^2,\ \forall\xi^i\in R^h,(x,t)\in Q, i=1,2,\dots,n; \tag{24}$$

(B) $\lambda_\theta(x,t)\geq\delta_1>0\ \ \forall(x,t)\in Q$, $\lambda_\theta, a_{ij}\in C(\overline{Q})$ и $\nabla_{x''}a_{ij}\in L_\infty(Q_\delta)$ для всех $i,j=1,2,\dots,n$; β_c, a_i, a_0, $\beta_\theta\in L_q(Q)$, $\nabla_{x''}a_i$, $\nabla_{x''}a_0\in L_q(Q_\delta)$ $(i=1,2,\dots,n)$.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma\in C^2$, $q>n+2$, $r=sh$, *условия* (А), (В), (20)–(24) *выполнены. Фиксируем* $R_0>0$. *Тогда существует число* $\tau_0=\tau_0(R_0)\in(0,T]$ *такое, что для всех данных* $(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,f,f_\theta,f_0)$, *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{j=1}^3(\|\Phi_j\|_{W_q^{2,1}(Q)}+\|\nabla_{x''}\Phi_3\|_{W_q^{2,1}(Q_\delta)}+\|f\|_{L_q(Q)}+\|f_\theta\|_{L_q(Q)}+\|f_0\|_{L_q(Q)}+\|\nabla_{x''}f_0\|_{L_q(Q_\delta)})\leq R_0, \tag{25}$$

существует единственное решение $(u,p,\Theta,C,q_1,\dots,q_r)$ *задачи* (1), (2), (4), (5)-(7), (13) *из класса*

$$u \in W_q^{2,1}(Q^{\tau_0}),\, p \in L_q(0,\tau_0;\dot{W}_q^1(G)),\; q_j \in L_q(Q_0^{\tau_0})\,(j=1,2,\ldots,r),$$

$$\Theta, C \in W_q^{2,1}(Q^{\tau_0}),\; \nabla_{x''} C \in W_q^{2,1}(Q_{\delta_2}^{\tau_0})\,\forall \delta_2 < \delta.$$

И при $\delta_1 < \delta$ *найдется постоянная* $c = c(R_0, \delta_1)$ *такая, что для любых двух решений* u^i, Θ^i, C^i, q^i, $q^i = (q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{ir})$ $(i=1,2)$ *из этого класса, отвечающих данным* $(\Phi_1^i, \Phi_2^i, \Phi_3^i, f^i, f_\theta^i, f_0^i)$ $(i=1,2)$, *справедлива оценка устойчивости*

$$\|u^1-u^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|\Theta^1-\Theta^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|C^1-C^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} +$$
$$\|\nabla_{x''}(C^1-C^2)\|_{W_q^{2,1}(Q_{\delta_1}^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^{r}\|q_{1j}-q_{2j}\|_{L_q(Q_0^{\tau_0})} \le$$
$$c(\sum_{j=1}^{3}(\|\Phi_j^1-\Phi_j^2\|_{W_q^{2,1}(Q^{\tau_0})} + \|\nabla_{x''}\Phi_3^1-\nabla_{x''}\Phi_3^2\|_{W_q^{2,1}(Q_\delta^{\tau_0})} + \|f^1-f^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} +$$
$$\|f_\theta^1-f_\theta^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \|f_0^1-f_0^2\|_{L_q(Q^{\tau_0})} + \|\nabla_{x''}f_0^1-\nabla_{x''}f_0^2\|_{L_q(Q_\delta^{\tau_0})}).$$

Линеаризация системы (1), (2), (4) приводит к системе

$$u_t - \nu\Delta u + \nabla p = \sum_{j=1}^{n} B_j u_{x_j} + B_0 u + f + \beta_C C + \beta_\theta \Theta,\; \operatorname{div} u = 0, \tag{26}$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta\Theta + \sum_{j=1}^{n} b_j \Theta_{x_j} + b_0\Theta = f_\theta + \sum_{j=1}^{n} b^j u_j, \tag{27}$$

$$C_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j C_{x_j} + a_0 C = f_c + \sum_{j=1}^{n} a^j u_j, \tag{28}$$

где считаем, что

$$\beta_C, \beta_\theta, B_0, b^j, b_0, a_0, a^j, B_j, b_j, a_j \in L_q(Q), \tag{29}$$

$$\nabla_{x''} a_0, \nabla_{x''} a^j, \nabla_{x''} a_j \in L_q(Q_\delta),\; j=1,2,\ldots,n. \tag{30}$$

$$\lambda_\theta(x,t) \ge \delta > 0\,\forall (x,t)\in Q, \lambda_\theta, c_{ij} \in C(\overline{Q}), \nabla_{x''} c_{ij} \in L_\infty(Q_\delta) \tag{31}$$

для всех $i,j=1,2,\ldots,n$. В этом случае справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in C^2$, $q > n+2$, $r = sh$ *и условия* (A), (20)–(24), (29)–(31) *выполнены. Тогда существует единственное решение* $(u, p, \Theta, C, q_1, \ldots, q_r)$ *задачи* (26)–(28), (5)–(7), (13) *из класса*

$$u \in W_q^{2,1}(Q),\, p \in L_q(0,T;\dot{W}_q^1(G)),\; q_j \in L_q(Q_0)\;\; (j=1,2,\ldots,r),$$

$\Theta, C \in W_q^{2,1}(Q),\; \nabla_{x''} C \in W_q^{2,1}(Q_{\delta_2})\,\forall \delta_2 < \delta.$ *Зафиксируем* $\delta_2 < \delta$. *Решение удовлетворяет оценке:*

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\Theta\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\nabla p\|_{L_q(Q)} + \|C\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \sum_{j=1}^{r}\|q_j\|_{L_q(Q_0)} +$$
$$\|\nabla_{x''} C\|_{W_q^{2,1}(Q_{\delta_2})} \le c(\sum_{i=1}^{3}\|\Phi_i\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\nabla_{x''}\Phi_3\|_{W_q^{2,1}(Q_\delta)} + \tag{32}$$
$$\|f_0\|_{L_q(Q)} + \|\nabla_{x''} f_0\|_{L_q(Q_\delta)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f_\theta\|_{L_q(Q)}),$$

где постоянная c не зависит от Φ_i $(i=1,2,3)$, f_0, f и f_θ.

Постановка задачи и основные результаты для системы (10)

В этом параграфе мы рассматриваем как линейные обратные задачи об определении правой части (функции источника), так и нелинейные коэффициентные задачи. В качестве начально-краевых условий выбираем условия (11), а в качестве условий переопределения условия (13) (включая и точечные условия). Считаем, как и ранее, что правая часть (функция источников) имеет вид

$$f_c = f_0(x,t) + \sum_{i=1}^{r} f_i(x,t) q_i(x',t). \tag{33}$$

Отметим, что задачи оптимального контроля для квазилинейных параболических систем второго порядка рассматривались в ряде работ (см., например, [18]). В проблеме определения функции источников мы имеем дело с двумя типичными ситуациями: случай пространственно распределенных источников и точечные источники. В случае пространственно распределенных источников мы можем считать, что функции f_i в правой части (10) есть достаточно гладкие функции. В последнем случае функция источников есть некоторое распределение, как правило вида $\sum_{i=1}^{s}\delta(x-x_i)N_i(t)+f_0$, где $\delta(x-x_i)$ – дельта-функции Дирака. В этом случае очень часто рассматривается задача с точечными условиями переопределения, которая в этом случае является некорректной в классах конечной гладкости. Имеется большое количество работ, посвященных задачам определения точечных источников и некоторым другим близким задачам как в одномерном (см. [19]–[21]), так и в многомерном случае (см. [27]–[36]). В случае нескольких загрязняющих компонент подобные задачи возникают и для систем (см., например, [19], [21], [27]). Нередко определению подлежат только функции $N_i(t)$, а расположение источников считается известным. Часто также мощности источников $N_i(t)$ считаются постоянными или известными функциями, умноженными на неизвестные постоянные, и это упрощает задачу (см. [27]–[30]). Иногда сумма в правой части (33) заменяется суммой $\sum_{i=1}^{r}N_i\delta(x-x_i,t-t_i)$, т. е. источники действуют мгновенно (см. [27, 29, 30]). Большинство приведенных работ посвящены численным методам решения этих задач, основным из которых является метод наименьших квадратов, т. е. задача сводится к минимизации некоторого квадратичного функционала, а также некоторым вопросам типа единственности решений задачи или оценок устойчивости, Численные методы этих и других задач с точечным переопределением в случае $n=1$ изложены в книге [37] (см. также [38, 39]). Можно также сослаться на книгу [40], также посвященную одномерному случаю, где получен ряд теорем существования, в частности для задач с точечным переопределением. В многомерном случае задачи с условием переопределения вида (13) для параболических уравнений, по-видимому, впервые начали рассматриваться в работах Ю. Е. Аниконова и Белова Ю. Я., где в качестве поверхностей Γ_i в условиях переопределения брались сечения области плоскостями коразмерности 1, скажем $x_n = const$. Можно сослаться на книгу [41], где имеется ряд результатов и подробная библиография. Можно также отметить ряд последних работ [41]–[46], где также имеются условия переопределения такого вида. Так называемым распределенным источникам посвящены, например, работы [47]–[49], и также работы [50]–[57]. Также сошлемся на результаты, изложенные в монографии [10], которые посвящены абстрактной теории обратных задач для дифференциально-операторных уравнений первого порядка и приложениям этих результатов. В качестве условий переопределения рассматриваются условия в виде заданного функционала от решения. В частности, эти результаты позволяют исследовать ряд задач с точечными условиями переопределения (правда не для самых общих классов уравнений и при достаточно жестких условиях на данные).

Перейдем к рассмотрению обратных задач для параболических систем. Вначале мы приведем некоторые результаты для коэффициентных обратных задач, где вместе с решением определяем правую часть и коэффициенты уравнения. Считаем, что оператор A в (10) – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h\times h$, представимый в виде

$$A(x,t,D)=\sum_{i=r+1}^{sh} q_i(x',t)A_i(x,t,D_x)+A_{sh+1}(x,t,D_x),$$
$$A_i=\sum_{|\alpha|\le 2m} a_{i\alpha}(x,t)D^\alpha \ (i=r+1,\dots,sh+1),\ D=(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\dots,\partial_{x_n}),$$

где естественным образом считаем, что $sh>r$. Далее в этом параграфе предполагаем, что выполнены условия (A), в котором область G_0 заменена на всю область G. Кроме того, считаем, что коэффициенты оператора A и функциональные пространства могут быть комплексными.

Условия согласования и гладкости данных могут быть записаны в виде:

$$\exists\Phi(x,t)\in W_p^{1,2m}(Q):\ \Phi|_{t=0}=C_0(x), B_j\Phi|_S=g_j\ (j=1,\dots,m), \tag{34}$$

$$\partial_{x_i}\Phi\in W_p^{1,2m}(Q_\delta), \Phi|_{S_j}=\psi_j(x',t)\in C([0,T];C^{2m}(\overline{\Omega})), \psi_{jt}\in C(\overline{Q_0}), \tag{35}$$

$$f_0\in L_p(Q),\ \partial_{x_i}f_0\in L_p(Q_\delta),\ f_0|_{S_j}\in C(\overline{Q_0}), \tag{36}$$

где $j=1,2,\dots,s$ и $i=k+1,\dots,n$. Условия на коэффициенты операторов A,B_j более или менее стандартные. Более того, для простоты выкладок мы будем использовать не самые точные условия на коэффициенты. Мы считаем, что

$$\begin{gathered} a_{i\alpha}(x,t)\in L_\infty(Q)\ (|\alpha|<2m),\ a_{i\alpha}\in C(\overline{Q})(|\alpha|=2m, i=r+1,\dots,sh+1),\\ b_{j\beta}\in C^{2m-m_j}(\overline{S})\,(j=1,\dots,m,|\beta|\le m_j), \end{gathered} \tag{37}$$

$$f_j(x,t)\in L_p(Q),\partial_{x_i}f_j(x,t)\in L_p(Q_\delta)\,(j=1,2,\dots,s, i\ge k+1), \tag{38}$$

при всех $i=k+1,k+2,\dots,n$ функции $\partial_{x_i}a_{j\alpha}(x,t),\partial_{x_i}b_{j\beta}(x,t)$

удовлетворяют условиям (37), (39)

где область Q заменена на Q_δ, а S на S_δ.

Мы будем искать функции q_i в классе непрерывных функций. Поэтому потребуем, чтобы

$$a_{i\alpha}(x',\phi^j(x'),t),\ f_l(x',\phi^j(x'),t)\in C(\overline{Q_0}) \tag{40}$$

при всех $l=1,\dots,r$, $i=r+1,r+2,\dots,sh+1$ и $|\alpha|<2m$.

Рассмотрим матрицу $B(x',t)$ размера $sh\times sh$, строчки которой с номерами от $(j-1)h+1$ до jh занимают вектора-столбцы

$$(-f_1(x,t),-f_2(x,t),\dots,-f_r(x,t),A_{r+1}\Phi(x,t),\dots,A_{sh}\Phi(x,t))|_{x''=\phi^j(x')}.$$

Можно показать, используя условия (34)–(40) и теоремы вложения, что элементы этой матрицы непрерывны на $\overline{Q_0}$. Потребуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0>0$ такая, что

$$|\det B(x',t)|\ge\delta_0\quad \forall x'\in\Omega, t\in[0,T]. \tag{41}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$B(x',t)\vec{q}^{\,0}=\vec{g},\vec{q}^{\,0}=(q_1^0,q_2^0,\dots,q_{sh}^0), \tag{42}$$

где $\vec{g}$ – вектор-столбец, координаты которого с номерами от $(j-1)h+1$ до jh есть вектор $f(x',\phi^j(x'),t)-A_{sh+1}\Phi(x',\phi^j(x'),t)-\Phi_t(x',\phi^j(x'),t)$. При выполнении условия (41) система (42) имеет единственное решение $\vec{q}^{\,0}=(q_1^0,\dots,q_{sh}^0)=(B(x',t))^{-1}\vec{g}(x',t)$. Приведенные выше условия на данные задачи гарантируют, что $\vec{q}^{\,0}\in C(\overline{Q_0})$. Введем оператор:

$$A_0(x,t,D)=\sum_{i=r+1}^{sh} q_i^0(x',t)A_i(x,t,D_x)+A_{hs+1}(x,t,D_x),$$

и рассмотрим вспомогательное уравнение:

$$C_t+A_0C=f. \tag{43}$$

Фиксируем $i\in\{1,2,\dots,s\}$ и перейдем в области $Q_{\delta_1 i}$ $(\delta_1<\delta)$, к переменным $y'=x',y''=x''-\phi^i(x'),t=t$. При этой замене операторы A,B_j перейдут в некоторые операторы $A^i(y,t,D_y),B_j^i(y,t,D_y)$. Обозначим через $A_{y'}^i,B_{jy'}^i$ части операторов A^i,B_j, не содержащие производных по переменным $y_{k+1},y_{k+2},\dots,y_n$, а через $A_{y''}^i,B_{jy''}^i$ – остатки. Аналогичный смысл имеют обозначения $A_{x'},B_{jx'},A_{x''},B_{jx''}$, $A_{0x'},A_{0x''}$. Опишем связь между производными в новых и старых переменных. Имеем, что:

$$\partial_{x_j}=\partial_{y_j}-\sum_{r=k+1}^{n}\phi_{ry_j}^i(y')\partial_{y_r}\ \ (j\le k),\ \partial_{x_j}=\partial_{y_j}\ \ (j>k),$$

$$\partial_{y_j}=\partial_{x_j}+\sum_{r=k+1}^{n}\phi_{rx_j}^i(x')\partial_{x_r}\ \ (j\le k),\ \partial_{y_j}=\partial_{x_j}\ \ (j>k).$$

Таким образом, будем иметь, что $A_{y'}^i(y,t,D_{y'})=A_{x'}(y',y''+\phi^i(y'),t,D_{y'})$, $B_{jy'}^i(y,t,D_{y'})=B_{jx'}(y',y''+\phi^i(y'),t,D_{y'})$. Ниже мы для простоты считаем, что область G ограничена. Однако утверждения теорем, приведенных ниже, остаются справедливыми и в случае, если область G не ограничена и соответствующая теорема о разрешимости прямой задачи имеет место. Необходимые дополнительные условия на коэффициенты операторов в случае неограниченных областей могут быть легко найдены в литературе (см., например, библиографию и результаты в [59, 58, 7, 8, 17]).

Теорема 3. *Пусть условие* (A)*, где область G_0 заменена на область G и условия* (34)–(41) *выполнены, $\Gamma\in C^{2m}$, $k_j\neq 1/p$ для всех j, оператор ∂_t+A_0 параболичен и выполнено условие Лопатинского для задачи* (43), (11). *Фиксируем положительную постоянную R, постоянную δ_1 из условия* (16) (*записанного для оператора A_0*) *и постоянную δ_0 из условия* (41). *Рассмотрим класс данных $S=\{C_0,g_1,\dots,g_m,f_0,\psi_1,\dots,\psi_s\}$, удовлетворяющих* (34)–(36) *и таких, что для соответствующих функций Φ из* (34) *выполнено:*

$$\begin{gathered}\|\Phi\|_{W_p^{1,2m}(Q)}+\|\nabla_{x''}\Phi\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)}+\|f\|_{L_p(Q)}+\|\nabla_{x''}f\|_{L_p(Q_\delta)}\\ +\sum_{j=1}^{s}(\|f(t,x',\phi^j(x'))\|_{C(\overline{Q_0})}+\|\psi_j\|_{C([0,\tau_0];C^{2m}(\overline{\Omega}))}+\|\psi_{jt}\|_{C(\overline{Q_0})})\le R,\end{gathered} \tag{44}$$

для оператора ∂_t+A_0 выполнено условие параболичности с постоянной δ_1 в (16) и условие (41) с постоянной δ_0. Фиксируем также постоянные $\delta_2<\delta$. Тогда найдется число $\tau_0=\tau_0(R,\delta_0,\delta_1)\in(0,T]$ такое, что для всех данных из класса S справедливы следующие утверждения.

1. *Если* $B^j_{iy''}(y',0,t,D_y)=0$ *для всех* $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,s$, *то существует единственное решение* $(C,q_1,\ldots,q_{sh})$ *задачи* (10), (11), (13), *отвечающее этим данным, из класса*

$$C\in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}):\ \nabla_{x''}C\in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}_{\delta_2})\,\forall\delta_2<\delta,\ q_j\in C(\overline{Q_0^{\tau_0}}),\ j=1,2,\ldots,sh.$$

В частности $B^j_{iy''}(y',0,t,D_y)=0$ *для всех* $i=1,2,\ldots,m$ *и* $j=1,2,\ldots,s$, *если система* $\{B_i\}$ *– система Дирихле, т. е. система граничных условий имеет вид* $\dfrac{\partial^k C}{\partial n^k}|_S=g_j$, $k=0,1,\ldots m-1$,
где производные берутся по направлению внешней единичной нормали n к Γ.

2. *Если* $(C^l,q_1^l,\ldots,q_{sh}^l)$ $(l=1,2)$ *два решения задачи* (10), (11), (13), *отвечающих двум различным наборам данных задачи* f_0^i, ψ_j^i, u_0^i, g_η^i $(j=1,\ldots s$, $\eta=1,2,\ldots,m$, $i=1,2)$, *из класса* S, *то справедлива оценка устойчивости*

$$\|C^1-C^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})}+\|\nabla_{x''}(C^1-C^2)\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}_{\delta_2})}+\sum_{j=1}^{sh}\|q_j^1-q_j^2\|_{C(\overline{Q_0^{\tau_0}})}$$
$$\le c(\|\Phi^1-\Phi^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})}+\|\nabla_{x''}(\Phi^1-\Phi^2)\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}_{\delta})}+\|f_0^1-f_0^2\|_{L_p(Q^{\tau_0})}$$
$$+\|\nabla_{x''}(f_0^1-f_0^2)\|_{L_p(Q^{\tau_0}_{\delta})}+\sum_{j=1}^{s}(\|(f_0^1-f_0^2)(t,x',\phi^j(x'))\|_{C(\overline{Q_0^{\tau_0}})}$$
$$+\|\psi_j^1-\psi_j^2\|_{C([0,\tau_0];C^{2m}(\overline{\Omega}))}+\|\psi_{jt}^1-\psi_{jt}^2\|_{C(\overline{Q_0^{\tau_0}})}),$$

где Φ^i *– соответствующие функции из условий* (34) *и* c *– постоянная, зависящая от величин* $R,\delta_1,\delta_0,\delta_2$.

Перейдем к рассмотрению линейного случая. Таким образом, считаем, что все коэффициенты оператора A – известные функции, т. е. $r=sh$, $A=A_{1+sh}=\sum_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha(x,t)D^\alpha$, и все неизвестные функции q_i входят в правую часть уравнения (10). В этом случае в матрице $B(x',t)$ размера $sh\times sh$ строчки с номерами от $(j-1)h+1$ до jh занимают вектора-столбцы:

$$(-f_1(x',\phi^j(x'),t),-f_2(x',\phi^j(x'),t),\ldots,-f_r(x',\phi^j(x'),t).$$

Рассмотрим вспомогательные задачи:

$$\psi_t^j+A^j_{0y'}(y',0,t,D_{y'})\psi^j=0,(y',t)\in Q_0, \tag{45}$$

$$\psi^j(y',0)=0, \tag{46}$$

$$B_{iy'}\psi^j|_{S_0}=0,\quad j=1,2,\ldots,s,i=1,2,\ldots,m. \tag{47}$$

Условия (37)–(40) переходят в условия:

$$\begin{gathered}a_\alpha(x,t)\in L_\infty(Q)\ (|\alpha|<2m),\ a_\alpha\in C(\overline{Q})\,(|\alpha|=2m,\\ b_{j\beta}\in C^{2m-m_j}(\overline{S})\,(j=1,\ldots,m,|\beta|\le m_j),\end{gathered} \tag{48}$$

$$f_j(x,t)\in L_p(Q),\partial_{x_i}f_j(x,t)\in L_p(Q_\delta)\,(j=1,2,\ldots,s,i\ge k+1), \tag{49}$$

$$\text{при всех } i = k+1, k+2, \ldots, n \text{ функции } \partial_{x_i} a_\alpha(x,t),\ \partial_{x_i} b_{j\beta}(x,t)$$
$$\text{удовлетворяют условиям (37),} \tag{50}$$
$$\text{где область } Q \text{ заменена на } Q_\delta, \text{ а } S \text{ на } S_\delta.$$

$$a_\alpha(x', \phi^j(x'), t),\ f_l(x', \phi^j(x'), t) \in C(\overline{Q_0}),\ l = 1, \ldots, r, |\alpha| < 2m. \tag{51}$$

Пусть Ψ_0 – класс вектор-функций $\vec{\psi} = (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^s) \in W_p^{1,2m}(Q_0)$, координаты которых удовлетворяют (45), (46), и существует функция Φ, удовлетворяющая (34), (35), где $C_0 = 0, g_j \equiv 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, и такая, что

$$B_{ix'}(x', \phi^j(x'), t, D_{x'})\psi^j|_{S_0} = B_{ix'}(x', \phi^j(x'), D_{x'}, t)\Phi|_{S_0} \tag{52}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, s)$. Говорим, что равенства (13) выполняются в обобщенном смысле, если найдется вектор-функция $\vec{\psi} = (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^s) \in \Psi_0$ такая, что

$$C|_{S_i} = \psi_i(x', t) + \psi^i(x', t),\ (x', t) \in Q_0, i = 1, 2, \ldots, s. \tag{53}$$

Выполнение равенства (13) в обобщенном смысле означает, что равенство выполнено в фактор-пространстве $(W_p^{1,2m}(Q_0))^s/\Psi_0$, где в данном случае $W_p^{1,2m}(Q_0)$ – пространство вектор-функций $\vec{\psi} = (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^s)$, причем каждая из компонент $\psi^i \in W_p^{1,2m}(Q_0)$ – вектор длины h.

Теорема 4. *Пусть условия* (A), (34)–(36), (41), (48)–(51) *выполнены,* $k_j \neq 1/p$ *для всех* j. *Фиксируем* $\delta_1 < \delta$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Найдется постоянная* $c > 0$ *такая, что решение* $(C, q_1, \ldots, q_s)$ *задачи* (10), (11), (13) *из класса*

$$C \in W_p^{1,2m}(Q):\ \nabla_{x''}C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2})\ \forall \delta_2 < \delta,\ q_j \in C(\overline{Q_0})\ (j = 1, 2, \ldots, sh)$$

удовлетворяет оценке:

$$\|C\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \|\nabla_{x''}C\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})} + \sum_{j=1}^{hs}\|q_j\|_{C(\overline{Q_0})}$$
$$\leq c(\|\Phi\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \|\nabla_{x''}\Phi\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\nabla_{x''}f_0\|_{L_p(Q_\delta)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{s}(\|f_0(x', \phi^j(x'), t)\|_{C(\overline{Q_0})} + \|\psi_j\|_{C([0,T]; C^{2m}(\overline{\Omega}))} + \|\psi_{jt}\|_{C(\overline{Q_0})})).$$

2. Существует единственное решение $(C, q_1, \ldots, q_{sh})$ задачи (10), (11), (13), где равенство (13) понимается в обобщенном смысле, из класса:

$$C \in W_p^{1,2m}(Q),\ \nabla_{x''}C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})\ \forall \delta_1 < \delta,\ q_j \in C(\overline{Q_0})\ (j = 1, 2, \ldots, sh).$$

3. *Решение* $(C, q_1, \ldots, q_{sh})$ *задачи* (10), (11), (13), *где* $u_0 \equiv 0, f \equiv 0, g_j \equiv 0$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s) \in \Psi_0$, *из класса* $C \in W_p^{1,2m}(Q):\ \nabla_{x''}C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})\ \forall \delta_1 < \delta$ *не существует, если* $\psi \not\equiv 0$.

4. *Если* $B_{iy''}^j(t, y', 0, D_y) = 0$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, s$, *то* $\Psi_0 = \{0\}$ *и существует единственное решение* $(C, q_1, \ldots, q_s)$ *задачи* (10), (11), (13), *где равенство* (13) *понимается в обычном смысле, из класса* $C \in W_p^{1,2m}(Q):\ \nabla_{x''}C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})\ \forall \delta_1 < \delta,\ q_j \in C(\overline{Q_0})\ (j = 1, 2, \ldots, sh)$.

Обозначим через $\tilde{f}_i(x,t)$ функцию, равную $f_i(x,t)$ в Q и равную нулю в R^n, $G\times(0,T)$. Введем дополнительные условия:

$$\tilde{f}_i \in L_\infty(Q_0; L_p(R^{n-k})),\ i=1,2,\dots,r. \tag{54}$$

$$\partial_{x_i}\Phi \in W_p^{1,2m}(Q_\delta),\ \Phi|_{S_j} = \psi_j(x',t) \in W_p^{2,1}(Q_0),\ f_0 \in L_p(Q), \partial_{x_i} f_0 \in L_p(Q_\delta), \tag{55}$$

где $j=1,2,\dots,s$ и $i=k+1,\dots,n$. Теорема 4 допускает уточнение в следующем смысле.

Теорема 5. *Пусть условия* (A), (34), (36), (41), (54), (55) *выполнены,* $k_j \neq 1/p$ *для всех* j. *Фиксируем* $\delta_1 < \delta$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Найдется постоянная* $c>0$ *такая, что решение* $(C, q_1, \dots, q_s)$ *задачи* (10), (11), (13) *из класса*

$$C \in W_p^{1,2m}(Q):\ \nabla_{x''} C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2})\ \forall \delta_2 < \delta,\ q_j \in L_p(Q_0)\,(j=1,2,\dots,sh)$$

удовлетворяет оценке

$$\|C\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \|\nabla_{x''} C\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})} + \sum_{j=1}^{hs} \|q_j\|_{L_p(Q_0)} \le c(\|\Phi\|_{W_p^{1,2m}(Q)} +$$

$$\|\nabla_{x''}\Phi\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \|f_0\|_{L_p(Q)} + \|\nabla_{x''} f_0\|_{L_p(Q_\delta)} + \sum_{j=1}^{s} \|\psi_j\|_{W_p^{2,1}(Q_0)}).$$

2. Существует единственное решение $(C, q_1, \dots, q_{sh})$ задачи (10), (11), (13), где равенство (13) понимается в обобщенном смысле, из класса:

$$C \in W_p^{1,2m}(Q),\ \nabla_{x''} C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})\ \forall \delta_1 < \delta,\ q_j \in L_p(Q_0)\,(j=1,2,\dots,sh).$$

3. *Решение* $(C, q_1, \dots, q_{sh})$ *задачи* (10), (11), (13), *где* $C_0 \equiv 0, f \equiv 0, g_j \equiv 0$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s) \in \Psi_0$, *из класса* $C \in W_p^{1,2m}(Q):\ \nabla_{x''} C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})\ \forall \delta_1 < \delta$ *не существует, если* $\psi \not\equiv 0$.

4. *Если* $B_{iy''}^j(t, y', 0, D_y) = 0$ *для всех* $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,s$, *то* $\Psi_0 = \{0\}$ *и существует единственное решение* $(C, q_1, \dots, q_s)$ *задачи* (10), (11), (13), *где равенство* (13) *понимается в обычном смысле, из класса* $C \in W_p^{1,2m}(Q):\ \nabla_{x''} C \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})\ \forall \delta_1 < \delta,\ q_j \in L_p(Q_0)\quad (j=1,2,\dots,sh)$.

Постановка задачи и основные результаты для системы (10) в случае интегральных условий переопределения

Мы рассматриваем задачу (10)–(12), где, как и в предыдущем параграфе, оператор A имеет вид

$$A(x,t,D) = \sum_{i=r+1}^{sh} q_i(x',t) A_i(x,t,D_x) + A_{sh+1}(x,t,D_x),\ A_i = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_{i\alpha}(x,t) D^\alpha\ (i=r+1,\dots,sh+1),$$

соответственно, $f_c = f_0(x,t) + \sum_{i=1}^{r} f_i(x,t) q_i(x',t)$. Обратные задачи с интегральными условиями переопределения рассматривались во многих работах, однако большая часть из них посвящена уравнениям второго порядка, не всегда самого общего вида и случаю $G_i = G$ для всех i (см. [60–70]). Мы рассматриваем самый общий случай. Приведенные ниже результаты опубликованы в работах [71]–[73].

Условия согласования и гладкости. Фиксируем $p > n + 2m$ и предположим, что

$$C_0(x) \in W_p^{2m-2m/p}(G),\quad f_0 \in L_p(Q), \tag{56}$$

$$g_j(x,t)\in W_p^{k_j,2mk_j}(S),\ k_j=(2m-m_j-\frac{1}{p})\frac{1}{2m},\ j=1,2,\dots,m, \tag{57}$$

$$g_j(x,0)=B_j(x,0)C_0(x)|_{\partial G},\ j=1,2,\dots,m. \tag{58}$$

$$\psi_i(t)\in C^1[0,T],\psi_i(0)=\int_{G_i}C_0(x)\phi_i(x)dx,\ i=1,2,\dots,s. \tag{59}$$

Условия на коэффициенты операторов A,B_j более или менее стандартные. Более того, для простоты выкладок мы будем использовать не самые точные условия на коэффициенты. Мы считаем, что:

$$a_{i\alpha}(t,x)\in L_\infty(Q)\,(|\alpha|<2m),\ a_{i\alpha}\in C(\overline{Q})\,(|\alpha|=2m),\ b_{j\beta}\in C^{2m-m_j}(\overline{S})\,(j=1,\dots,m,|\beta|\le m_j). \tag{60}$$

Кроме того, будем считать, что:

$$f_i(x,t)\in L_\infty(0,T;L_p(G)),\ i=1,2,\dots,r. \tag{61}$$

$$\phi_j\in W_q^1(G_j)\,(1/p+1/q=1),\partial G_j\subset C^1,\ j=1,2,\dots,s. \tag{62}$$

Пусть $G_0=\cup_{j=1}^s G_j$, $Q_0=G_0\times(0,T)$. Потребуем также, что

$$f_j\in C([0,T];L_p(G_0)),(j=0,1,2,\dots,r), \tag{63}$$

$$a_{i\alpha}\in C([0,T],W_p^1(G_0)),\ \text{при}\ |\alpha|=2m, \tag{64}$$

$$a_{i\alpha}\in C([0,T],L_p(G_0)),(i=r+1,r+2,\dots,sh+1,\ |\alpha|\le 2m-1). \tag{65}$$

Определим матрицу B размера $sh\times sh$, строки которой с номерами от $(k-1)h+1$ до kh, $(k=1,2,\dots,s)$ занимают матрицы размера $h\times r$ со столбцами:

$$\int_G f_1\phi_k dx,\dots,\int_G f_r\phi_k dx,-\int_G A_{r+1}(x,0)u_0\phi_k dx,\dots,-\int_G A_{sh}(x,0)u_0\phi_k dx.$$

Мы требуем, чтобы выполнялось неравенство:

$$|\det B|\ge\delta_0>0. \tag{66}$$

Определим постоянные q_i^0, исходя из решений системы:

$$\psi_{jt}(0)+\sum_{i=r+1}^{sh}q_i^0\int_G A_i u_0\phi_j\,dx+\int_G A_{sh+1}u_0\phi_j\,dx=\sum_{i=1}^{r}q_i^0\int_G f_i(x,0)\phi_j dx+\int_G f_0(x,0)\phi_j dx. \tag{67}$$

Положим, $A_0=\sum_{i=r+1}^{sh}q_i^0A_i+A_{sh+1}$.

Теорема 6. *Пусть условия* (56)–(66) *выполнены,* $\Gamma\in C^{2m}$, $k_j\ne 1/p$ *для всех* j, *оператор* ∂_t+A_0 *параболичен и выполнено условие Лопатинского для задачи* (43), (11). *Фиксируем положительную постоянную* R, *постоянную* δ_1 *из условия* (16) (*записанного для оператора* A_0) *и постоянную* δ_0 *из условия* (66). *Рассмотрим класс данных* $S=\{C_0,g_1,\dots,g_m,f_0,\psi_1,\dots,\psi_s\}$, *удовлетворяющих* (56)–(59) *и таких, что*

$$\| f_0 \|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{s} \| \psi_j^i \|_{C^1([0,T])} + \| f_0 \|_{C([0,T];L_p(G_0))} + \| C_0 \|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} \le R. \quad (68)$$

Пусть для оператора $\partial_t + A_0$ выполнено условие параболичности с постоянной δ_1 в (16) и условие (66) с постоянной δ_0. Тогда найдется число $\tau_0 = \tau_0(R,\delta_0,\delta_1) \in (0,T]$ такое, что для всех данных из S справедливы следующие утверждения:

1) *на промежутке* $t \in [0,\tau_0]$ *существует единственное решение* $(C, q_1,..,q_r)$ *задачи* (10)–(12) *такое, что* $C \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), q_i(t) \in C([0,T]), i = 1,2,...,sh;$

2) решение непрерывно зависит от данных задачи, т. е. для любых двух решений $(C^i, q_1^i, \dots, q_{sh}^i)$ $(i = 1,2)$ задачи (10)–(12) из класса $C^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}), q_j^i \in C([0,\tau_0]), (i = 1,2, j = 1,2,\dots,r),$ *отвечающих двум различным наборам данных* f_0^i, ψ_j^i, C_0^i, g_η^i $(j = 1,2,\dots,s$, $i = 1,2$, $\eta = 1,2,\dots,m)$ *из класса* S *справедлива оценка:*

$$\| C^1 - C^2 \|_{W_p^{2m,1}(Q^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^{r} \| q_j^1 - q_j^2 \|_{C([0,\tau_0])} \le$$

$$c(\| f_0^1 - f_0^2 \|_{L_p(Q^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^{s} \| \psi_j^1 - \psi_j^2 \|_{C^1([0,\tau_0])} + \| f_0^1 - f_0^2 \|_{C([0,\tau_0];L_p(G_0))} +$$

$$\| C_0^1 - C_0^2 \|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j^1 - g_j^2 \|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S^{\tau_0})}),$$

где c – постоянная, зависящая от величин R, δ_1, δ_0.

Перейдем к линейному случаю, т. е. к задаче определения функции источника. Считаем, что все коэффициенты оператора A – известные функции, т. е. $r = sh$, $A = A_{1+sh} = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x,t) D^\alpha$ и все неизвестные функции q_i входят в правую часть уравнения (10). В этом случае в матрице $B(x',t)$ размера $sh \times sh$, строчки с номерами от $(j-1)h+1$ до jh занимают вектора-столбцы $\int_G f_1 \phi_k dx, \dots, \int_G f_r \phi_s dx.$ Пусть

$$a_\alpha(t,x) \in L_\infty(Q)\,(|\alpha| < 2m),\ a_\alpha \in C(\overline{Q})\,(|\alpha| = 2m), b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\overline{S})\,(j = 1,\dots,m, |\beta| \le m_j), \quad (69)$$

$$\psi_i(t) \in W_p^1[0,T], \psi_i(0) = \int_{G_i} C_0(x)\phi_i(x)dx, i = 1,2,\dots,s, \quad (70)$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (56)–(58), (61)–(62), (66), (69), (70). *Тогда существует единственное решение* $(u, q_1,..,q_r)$ *задачи* (10)–(12) *такое, что*

$$C \in W_p^{1,2m}(Q), q_i(t) \in L_p(0,T), i = 1,2,\dots,r.$$

Решение удовлетворяет оценке:

$$\| C \|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r} \| q_i(t) \|_{L_p(0,T)} \le$$

$$c(\| f_0 \|_{L_p} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} + \| C_0 \|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{s} \| \psi_i \|_{W_p^1(0,T)}).$$

Литература

1. Bejan, A. Convection heat transfer [Text] / A. Bejan. – New York : J. Wiley & Sons, Inc., 2004.
2. Joseph, D. D. Stability of fluid motions [Text] V. 27 / D. D. Joseph // I. Springer Tracts in Natural Philosophy. – Berlin-Heidelberg-New-York : Springer-Verlag, 1976.
3. Joseph, D. D. Stability of fluid motions [Text] V. 27 / D. D. Joseph // II. Springer Tracts in Natural Philosophy. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1976.
4. Математическиое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса [Текст] / В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Верезуб [и др.]. – Москва :Наука, 1987.
5. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса [Текст] / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – Ленинград : Госэнергоиздат, 1963.
6. Triebel, H. Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators [Text] / H. Triebel. – Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
7. Denk, R. R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type [Text] / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Memoirs of the AMS. – 2003. – Vol. 166. – Pp. 1–114.
8. Amann, H. Linear and quasilinear parabolic problems [Text] V. 1 / H. Amann. – Birkhauser, Basel. 1995.
9. Amann, H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces [Text] / H. Amann // Glasnik matematicki. – 2000. – Vol. 35 (55). – Pp. 161–177.
10. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics [Text] / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – New-York : Marcel Dekker, Inc. 1999.
11. Chebotarev, A. Yu. Finite-Dimensional Stabilization of Stationary Navier-Stokes Systems [Text] / A. Yu. Chebotarev // Differential Equations. – 2012. – Vol. 48, № 3. – Pp. 390–396.
12. Алексеев, Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. Москва : Научный мир, 2010.
13. Capatina, A. A control problem in biconvective flow [Text] / A. Capatina, R. Stavre // J. Math. Kyoto Univ. – 1997. – Vol. 37, № 4. – Pp. 585–595.
14. Korotkova, E. M. On Some Inverse Problems for a Linearized System of Heat and Mass Transfer [Text] / E. M. Korotkova, S. G. Pyatkov // Sib. Advances in Math. – 2015. – Vol. 25, № 2. – Pp. 110–123.
15. Pyatkov, S. G. Solvability of some inverse problems for the nonstationary heat-and-mass-transfer system [Text] / S. G. Pyatkov, M. L. Samkov // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – Vol. 446, № 2. – Pp. 1449–1465.
16. Короткова, Е. М. Обратные задачи об определении функции источников для систем тепломассопереноса [Текст] / Е. М. Короткова, С. Г. Пятков // Матем. Зам. СВФУ. – 2015. – Т. 22, В. 1. – С. 44–61.
17. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1967.
18. Amann, H. Optimal control problems governed by semilinear parabolic equations with low regularity data [Text] / H. Amann, P. Quittner // Advances in Differential Equations. – 2006. – Vol. 11(1). – Pp. 1–33.
19. Boano, F. Source identification in river pollution problems: a geostatistical approach [Text] / F. Boano, R. Revelli, L. Ridolfi // Water Recources Research. – 2005. – Vol. 41. – Pp. 1–13.
20. Ridolfi, L. Identification of Source Terms in Nonlinear Convection Diffusion Phenomena by Sine Collocation-Interpolation Methods [Text] / L. Ridolfi, M. Macis // Math. Comput. Modelling. – 1997. – Vol. 26, № 2. – Pp. 69–79.
21. Badia, A. El. Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem [Text] / A. El. Badia, T. Ha-Duong, A. Hamdi // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21. – Pp. 1–17.
22. Verdiere, N. Identifiability and identification a pollution source in a river by using a semi-discretized scheme [Text] / N. Verdiere, G. Joly-Blanchard, L. Denis-Vidal // J. Appl. Math. and Comp. – 2013. – Vol. 221. – Pp. 1–9.
23. Farcas, A. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable [Text] / A. Farcas, D. Lesnic // J. of Engineering Math. – 2006. – Vol. 54. – Pp. 375–388.
24. Fan, Y. Identifying the Heat Source for the Heat Equation with Convection Term [Text] / Y. Fan, Li D G // Int. Journal of Math. Analysis. – 2009. – Vol. 3, № 27. – Pp. 1317–1323.
25. Liu, C.-S. A global boundary integral equation method for recovering space-time dependent heat source [Text] / C.-S. Liu, C.-W. Chang // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. – 2016. – Vol. 92. – Pp. 1034–1040.
26. Badia, A. El. Inverse source problem in an advection-dispersion- reaction system: application to water pollution [Text] / A. El. Badia, A. Hamdi // Inverse Problems. – 2007. – Vol. 23. – Pp. 2103–2120.
27. Mamonov, A. V. Point source identification in non-linear advection-diffusion-reaction systems [Text] / A. V. Mamonov, Y.-H. R. Tsai // Inverse Probl. – 2013. – Vol. 29. – № 3, 035009.

28. Ling, L. Point Sources identification problems for heat equations [Text] / L. Ling, T. Takeuchi // Commun. Comput. Phys. – 2009. – Vol. 5, № 5. – Pp. 897–913.

29. Панасенко, А. Е., Старченко А. В. Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения [Текст] / А. Е. Панасенко, А. В. Старченко // Вестник Томского ГУ. Математика и механика. – 2008. – № 2(3). – С. 47–55.

30. Murray-Bruce, J. and Dragotti P. L. Estimating localized sources of diffusion fields using spatio-temporal sensor measurements [Text] / J. Murray-Bruce, P. L. Dragotti // IEEE Trans. on Signal Processing. – 2015. – Vol. 63, № 12. – Pp. 3018–3031.

31. Hamdi, A. Identication of Point Sources in Two Dimensional Advection-Diffusion-Reaction Equation: Application to Pollution Sources in a River [Text] / A. Hamdi // Stationary Case. Inverse Problems in Science and Engineering. – 2007. – Vol. 15, № 8. – Pp. 855–870.

32. Lushi, E. An inverse Gaussian plume approach for estimating atmospheric pollutant emissions from multiple point sources [Text] / E. Lushi, J. M. Stockie // Atmospheric Environment. – 2010. – Vol. 44. – Pp. 1097–1107.

33. Пененко, В. В. Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды [Текст] / В. В. Пененко // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 421–434.

34. Badia, A. El, Ha-Duong T. Inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem [Text] / A. El. Badia, T. Ha-Duong // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2002. – Vol. 10. – № 6. – Pp. 585–599.

35. Deng, X. On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity [Text] / X. Deng, Y. Zhao, J. Zou // Inter. J. Numer. Analysis and Modeling. – 2013. – Vol. 10, № 3. – Pp. 588–602.

36. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии [Текст] / Ю. А. Криксин, С. Н. Плющев, Е. А. Самарская [и др.] // Матем. модел. – 1995. – Т. 7, № 11. – С. 95–108.

37. Ozisik, M. N. Inverse heat transfer [Text] / M. N. Ozisik, H. A. B. Orlando // Taylor & Francis. – New-York, 2000.

38. Alifanov O. M. Inverse Heat Transfer Problems [Text] / O. M. Alifanov // Springer-Verlag. – Berlin Heidelberg, 1994.

39. Алифанов, О. М. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена [Текст] / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов. – Москва : Янус-К, 2009.

40. Ivanchov, M. Inverse problems for equations of parabolic type [Text] / M. Ivanchov // Math. Studies. Monograph Series. V. 10. – Lviv : WNTL Publishers, 2003.

41. Belov, Ya. Inverse problems for parabolic equations [Text] / Ya. Belov. – Utrecht : VSP, 2002.

42. Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса [Текст] / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 28–40.

43. Белов, Ю. Я. О задаче идентификации функции источника в системе уравнений составного типа [Текст] / Ю. Я. Белов // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2011. – Т. 4, В. 4. – С. 445–457.

44. Фроленков, И. В. О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде произведения [Текст] / И. В. Фроленков, Г. В. Романенко // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2012. – Vol. 5, № 1. – Pp. 122–131.

45. Фроленков, И. В. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении [Текст] / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Журнал СФУ. Серия матем. и физ. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 556–564.

46. Kriger, E. N. An Identification Problem of Nonlinear Lowest Term Coefficient in the Special Form for Two-Dimensional Semilinear Parabolic Equation [Text] / E. N. Kriger, I. V. Frolenkov // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – Vol. 9. – № 2. – Pp. 180–191.

47. Farcas, A. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable [Text] / A. Farcas, D. Lesnic // J. Engrg. Math. – 2006. – Vol. 54, № 4. – Pp. 375–388.

48. Fan, Y. Identifying the heat source for the heat equation with convection term [Text] / Y. Fan, D. G. Li // Int. J. Math. Anal. – 2009. – Vol. 3, № 27. – Pp. 1317–1323.

49. Liu, C.-S. A global boundary integral equation method for recovering spacedependent heat source [Text] / C.-S. Liu, C.-W. Chang // Internat. J. Heat and Mass Transf. – 2016. – Vol. 92. – Pp. 1034–1040.

50. Pyatkov, S. G. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations [Text] / S. G. Pyatkov, B. N. Tsybikov // J. Evol. Equat. – 2011. – Vol. 11. – Pp. 155–186.

51. Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems for parabolic equations [Text] / S. G. Pyatkov // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2011. – Vol. 18. – Pp. 917–934.

52. Пятков, С. Г. О некоторых классах эволюционных обратных задач для параболических уравнений [Текст] / С. Г. Пятков, Б. Н. Цыбиков // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – С. 141–153.

53. Пятков, С. Г. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений [Текст] / С. Г. Пятков, М. Л. Самков // Матем. тр. – 2012. – Т. 15. – С. 155–177.

54. Pyatkov, S. G. On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds [Text] / S. G. Pyatkov // Siberian Mathematical Journal. – 2016 – Vol. 57, № 5. – Pp. 870–880.

55. Пятков, С. Г. Определение функции источников в одномерном параболическом уравнении с учетом застойных зон [Текст] / С. Г. Пятков, В. В. Ротко // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23, № 4. – С. 46–57.

56. Пятков, С. Г. Об определении функции источника в квазилинейных параболических задачах с точечными условиями переопределения [Текст] / С. Г. Пятков, В. В. Ротко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 19–26.

57. Pyatkov, S. G. On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination [Electronic resource] / S. G. Pyatkov, V. V. Rotko // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1907, 020008. – Access mode: http://aip.scitation.org/toc /apc/1907/1.

58. Denk, R. Optimal L^p-L^{q-} estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data [Text] / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Math. Z. – 2007. – Vol. 257, № 1. – Pp. 193–224.

59. Amann, H. Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems. Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis [Text] / H. Amann // Teubner-Texte Math. Bd. 133. – Stuttgart: Teubner, 1993. – Pp. 9–126.

60. Iskenderov, A. D. Inverse problem for a linear system of parabolic equations [Text] / A. D. Iskenderov, A. Ya. Akhundov // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 79, 1. – Pp. 73–75.

61. Ismailov, M. I. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data [Text] / M. I. Ismailov, F. Kanca // Inverse Problems In Science and Engineering. – 2012. – Vol. 20, 24. – Pp. 463–476.

62. Li Jing, An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation [Text] / Li Jing, Xu Youjun // J. Appl. Math. Comput. – 2010. – Vol. 34. – Pp. 195–206.

63. Kamynin, V. L., Franchini E. An inverse problem for a higher-order parabolic equation [Text] / V. L. Kamynin, E. Franchini // Mathematical Notes. – 1998. – Vol. 64, 5. – Pp. 590–599.

64. Камынин, В. Л. Обратная задача определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с неограниченными коэффициентами [Текст] / В. Л. Камынин // Журнал вычислительной матем. и математической физики. – 2017. – Т. 57, 5. – С. 832–841.

65. Камынин, В. Л. Об обратной задаче определения старшего коэффициента в параболическом уравнении [Текст] / В. Л. Камынин // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84, В. 1. – С. 48–58.

66. Камынин, В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения [Текст] / В. Л. Камынин // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94, Вып. 2. – С. 207–217.

67. Kerimov, N. B. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions [Text] / N. B. Kerimov, M. I. Ismailov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – Vol. 396. – P. 546–554.

68. Кожанов, А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени [Текст] / А. И. Кожанов // Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. – 2005. – Т. 45, № 12. – С. 2168–2184.

69. Камынин, В. Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения [Текст] // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, Вып. 4. – С. 522–534.

70. Vasin, I. A. On the asymptotic behavior of solutions to inverse problems for parabolic equations [Text] / I. A. Vasin, V. L. Kamynin // Siberian Mathematical Journal. – 1997. – Vol. 38, № 4. – Pp. 647–662.

71. Пятков, С. Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений [Текст] / С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов // Научные ведомости Бел. ГУ. – 2014. – Вып. 35, № 7(183). – С. 61–75.

72. Пятков, С. Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений [Электронный ресурс] / С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов // Сиб. электронные известия. – 2014. – Т. 11. – С. 777–799. – Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru/v11/p777–799.pdf.

73. Пятков, С. Г. Об определении функции источника в математических моделях конвекции-диффузии [Текст] / С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 2. – С. 117–130.