ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 г. Выпуск 3 (46). С. 51–59

УДК 517.95

М. А. Вержбицкий

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ

Работа поддержана РФФИ и правительством ХМАО-ЮГРЫ, грант № 15-41-0063

В работе рассматриваются обратные задачи для математических моделей конвективного теплообмена. Вместе с решением начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка определяются неизвестные функции, входящие в граничное условие. В качестве условий переопределения берутся интегралы от решения с весом. Получена теорема существования и единственности решений.

Ключевые слова: обратная задача, конвективный теплообмен, граничный режим, параболическое уравнение, краевые и начальные условия, разрешимость.

M. A. Verzhbitskiy

INVERSE PROBLEMS OF DETERMINING BOUNDARY REGIMES

In the article we consider inverse problems for convective heat transfer models. We determine unknowns occurring in the boundary conditions together with a solution to a parabolic second order system. The overdetermination conditions are integrals of a solution with weight. The existence and uniqueness theorems of solutions to this inverse problem is established.

Key words: inverse problem, convective heat transfer, boundary regime, parabolic equation, boundary and initial conditions, solvability.

Введение

В работе рассматриваются математические модели, описываемые параболическими системами вида:

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t,x) u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) u_{x_i} + a_0(t,x) u = f, \tag{1}$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ, $t \in (0,T)$, $a_{ij}, a_i (i,j = 1,\dots,n)$, a_0 – матрицы размерности $h \times h$ и u вектор-функция длины h. Положим $Q = (0,T) \times G$, $S = (0,T) \times \Gamma$. Уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями вида

$$B(t,x)u|_S = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(t,x)u|_S = g, \; u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) u_{x_j}(t,x) \nu_i$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ – внешняя единичная нормаль к S. Обратная задача состоит в нахождении решения u задачи (1)-(2) и функции g вида $g = \sum_{i=1}^{m} q_i(t) \Phi_i(t,x)$, где функции q_i неизвестны, по данным переопределения

$$\int_G \langle u(x,t), \varphi_k(x) \rangle dx = \psi_k(t), \; k = 1,2,\dots,m, \tag{3}$$

где $\langle u(x,t), \varphi_k(x) \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^h$. Положим $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$.

Обратные задачи о нахождения неизвестных граничных режимов, в частности, задачи конвективного теплообмена, являются классическими (см., например, [1–10]). Они возникают в самых различных задачах математической физики: управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты, диагностика и идентификация теплопередачи в сверхзвуковых гетерогенных потоках, идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, моделирование свойств и тепловых режимов многоразовой тепловой защиты аэрокосмических аппаратов, исследование композиционных материалов и т. п. Математические модели и соответствующие обратные задачи описываются, например, в монографии [1]. Здесь основное внимание уделено численным метода решения этих задач, а также некоторым результатам в виде теорем единственности и оценок устойчивости. Отметим также монографию [2], посвященную в основном численным методам решения, где в одномерной ситуации рассматриваются разнообразные постановки обратных задач для параболических уравнений, в том числе и задачи определения граничных режимов. Здесь данные переопределения – значения решения в точках, лежащих внутри пространственной области. Эти задачи изучались и в других постановках в зависимости от типа условий переопределения. Очень часто они некорректны в смысле Адамара, в частности, в тех случаях, когда данные переопределения – значения решения в отдельных точках или на поверхностях, лежащих внутри области определения (см. [1]). В данной работе мы рассматриваем задачи с условиями переопределения в виде некоторых интегралов от решения с весом по пространственной области. Отметим, что условия такого вида очень часто используются в литературе и возникают в приложениях. Обратные задачи об определении коэффициентов уравнения или правой части с интегральными условиями переопределения рассматривались в работах [11–17] и монографиях [18], [19], и некоторых других работах. В частности теорема существования и единственности обобщенного решения задачи (1)–(3) (из класса $u \in W_2^{0,1}(Q)$)в случае $m = 1$, $h = 1$ была получена в работе [8], а в [9] аналогичный результат был получен для системы тепломассопереноса, состоящей из системы Навье-Стокса и параболического уравнения для концентрации переносимого вещества. В работе [10] была доказана регулярная разрешимость ($u \in W_2^{1,2}(Q)$) также для случая $m = 1$. Однако условия на данные здесь более сильные, чем наши, в частности, имеются и условия на нормы данных (см. [10, теорема 1]). Наши результаты получены при более слабых условиях на данные условия на данные и немного в других функциональных классах, решение уравнение (1) в нашем случае ищется в классе $W_p^{1,2}(Q)$. Аналогичные результаты получены в работе [25], но в случае $h = 1$. Мы обобщаем результаты этой работы на случай $h > 1$.

Вспомогательные результаты

Пусть E– банахово пространство. Через $L_p(G;E)$ (G – область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [20]. Мы также используем пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и т. д. – стандартные (см. [22, 20]). Если $E = R$ или $E = R^n$, то последнее пространство обозначаем просто рез $W_p^s(Q)$. Аналогично вместо $W_p^s(G;E)$ или $C^k(\overline{G};E)$ используем обозначение $W_p^s(Q)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0,T)$, положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J;L_p(G)) \cap L_p(J;W_p^r(G))$.

Соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Определения пространств Гельдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [21]. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) мы считаем вещественными.

Далее считаем, что G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^2 (см. определение, например, в [21, 17]). Пусть $(u,v) = \int_G u(x)v(x)dx$, если u и v скалярные функции и $(u,v) = \int_G \langle u(x,t), \varphi_k(x)\rangle dx$, если u и v вектора длины h, $Q^\gamma = (0,\gamma) \times G$ и $S^\gamma = (0,\gamma) \times \Gamma$.

Мы будем использовать в пространстве $W_p^s(0,\tau;E)$ ($s \in (0,1)$) – банахово пространство) норму $\|q(t)\|_{W_p^s(0,\tau;E)} = (\|q\|_{L_p(0,\tau;E)}^p + < q >_{s,\tau}^p)^{1/p}$, $< q >_{s,\tau}^p = \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{\|q(t_1)-q(t_2)\|_E^p}{|t_1-t_2|^{1+xp}} dt_1 dt_2$.

Если $E = \mathbb{R}$, то мы получим обычное пространство $W_p^s(0,\tau)$. При $s \in (1/p, 1]$ положим $\widetilde{W}_p^s(0,\tau) = \{q \in \widetilde{W}_p^s(0,\tau) : q(0) = 0\}$. Это банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{W_p^s(0,\tau)}$. В нем также можно определить и эквивалентную норму $\|q(t)\|_{W_p^s(0,\tau)}^p = \left\|\frac{q}{t^s}\right\|_{L_p(0,\tau)}^p + < q >_{s,\tau}^p$. Эквивалентность вытекает, например, из леммы 1 пункта 3.2.6 [20]. Аналогично определяем пространства $\widetilde{W}_p^s(0,\tau;L_p(G))$, $\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$, состоящее из функций $v(t,x)$ из $W_p^s(0,\tau;L_p(G))$ и $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$, соответственно, таких, что $u(0,x) = 0$. Новые нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau;L_p(G))}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}$ определяются естественным образом с использованием вышеприведенной нормы в $\widetilde{W}_p^s(0,\tau)$. Ниже мы приведем лемму, доказательство которой может быть найдено в [25].

Лемма 1. Пусть $s \in (1/p, 1)$ и $p \in (1, \infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Пусть $q(t) = W_p^s(0,\tau)$ ($\tau \in (0,T]$). Тогда после может быть изменения на множестве меры ноль $q \in C^p([0,\tau])$. Если $q(0) = 0$ и $\tilde{q}$ продолжение нулем функции q при $t \le 0$, то справедлива оценка

$$\|\tilde{q}\|_{W_p^s(-1+\tau,\tau)} \leq c_1 \|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)}, \tag{4}$$

где постоянная c_1 не зависит от $\tau \in (0,T])$ и q.

2. Произведение $q \cdot v$ функций класса $W_p^s(0,\tau)$ $(\tau \in (0,T])$ снова принадлежит $W_p^s(0,\tau)$, а если $q \in \widetilde{W}_p^s(0,\tau)$ и $u \in W_p^s(0,\tau)$, то $qu \in \widetilde{W}_p^s(0,\tau)$ и справедлива оценка

$$\|\tilde{q}\|_{W_p^s(0,\tau)} \leq c_2 \|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)} (< v >_{s,\tau} + \|v\|_{L_\infty(0,\tau)}), \tag{5}$$

где постоянная не зависит от $\tau \in (0,T]$ и q.

3. Если функция v строго отделена от нуля на $[0,\tau]$, т. е. $\delta_0 = \inf_{t\in[0,\tau]}|v(t)| > 0$, то отношение q/v функций класса $W_p^s(0,\tau)$ $(\tau \in (0,T])$ снова принадлежит $W_p^s(0,\tau)$ и справедлива оценка

$$\|q/v\|_{W_p^s(0,\tau)} \leq c_3 \|q\|_{W_p^s(0,\tau)} \|v\|_{W_p^s(0,\tau)}, \tag{6}$$

где постоянная c_3 не зависит от функции q, но зависит от δ_0 и стремится к ∞ при $\delta_0 \to 0$.

4. Пусть $q(t) \in \widetilde{W}_p^s(0,\tau)$ $(\tau \in (0,T])$, $v(t) \in W_p^s(0,T)$ и $\Phi(t,x) \in W_p^{s,2s}(S)$. Тогда $qv \in \widetilde{W}_p^s(0,\tau)$ и $q\Phi \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(S^\tau)$ и справедливы оценки

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)} \leq c \|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)} \|v\|_{W_p^s(0,T)}, \tag{7}$$

$$\|q\Phi\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(S^\tau)} \leq c_4 \|q\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\tau)} \|\Phi\|_{W_p^{s,2s}(S)}, \tag{8}$$

где постоянная c не зависит от $\tau \in (0,T]$.

Приведем используемые ниже условия на данные задачи. Зафиксируем число $s = 1/2 - 1/2\,p$.

Условия на коэффициенты:

$$a_{ij} \in C\big([0,T]; W_\infty^1(G)\big) \cap C\big(\bar{G}; C^{s+\varepsilon_0}([0,T])\big),\ \sigma \in C^{1/2+\varepsilon_0,1}(\bar{S}), \tag{9}$$

где $i,j = 1,2,\dots,n$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ – положительное число.

$$a_i \in L_\infty(G; W_p^s(0,T)),\ p > 3,\ (i = 0,1,\dots,n). \tag{10}$$

Считаем, что существует постоянная $\delta_0 > 3$ такая, что

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}\xi_i | \xi_j \rangle \geq \delta_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2,\ \forall (t,x) \in Q,\ \forall \xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Условия на данные задачи:

$$f \in L_p(Q),\ u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \tag{12}$$

$$g \in W_p^{s,2s}(S),\ g(0,x)|_\Gamma = B(0,x)u_0|_\Gamma, \tag{13}$$

$$\varphi_k \in W_\infty^1(G),\ \Phi_k W_p^{s,2s}(S),\ \psi_k \in W_p^{s+1}(0,T),\ (f,\varphi_k) \in W_p^s(0,T),\ k = 1,2,\dots,m. \tag{14}$$

Как следствие из теоремы 10.4 гл. 7 в [21] и пункта 4.3 в [26] имеем:

Теорема 1. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^2 и выполнены условия (9) – (13). Тогда существует единственное решение u задачи (1) – (2) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$. Решение удовлетворят оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq C(\|f\|_{L_p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|g\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S)}).$$

Как следствие теоремы 1 имеем:

Теорема 2. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^2, и выполнены условия (9) – (13), где $f \equiv 0$ и $u_0 \equiv 0$. Пусть $\gamma \in (0,T]$. Тогда на промежутке $(0,\gamma)$ существует единственное решение u задачи (1) – (2) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q^\gamma)$. Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c \|g\|_{\widetilde{W}_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S^\gamma)}),$$

где постоянная c не зависит от $\gamma \in (0,T]$ и g.

Доказательство. Продолжим g нулем при $t < 0$, и пусть $\tilde{g} = \begin{cases} g(t,x), t \in (-1+\gamma,\gamma) \\ g(2\gamma - t, x), t \in [\gamma, T+\gamma] \end{cases}$.

Очевидно, что $\tilde{g} \in W_p^{s,2s}(S)$ $(s = 1/2 - 1/2p)$. Используя теорему 1, построим решение задачи (1)-(2), где $u_0 \equiv 0$, $f \equiv 0$ и $\tilde{g}$ такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$. По теореме 1 имеем:

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\gamma)} \leq c \|\tilde{g}\|_{W_p^{1/2-1/2p,1-1/p}(S)}.$$

Оценим правую часть. Имеем, используя лемму 1, что

$$\|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}(S)} \leq \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((-1+\gamma)\times\Gamma)} \leq$$

$$c(\|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((-1+\gamma,\gamma)\times\Gamma)} + \|\tilde{g}\|_{W_p^{s,2s}((\gamma,1+\gamma)\times\Gamma))}) \le c_1\|g\|_{W_p^{s,2s}(S^\gamma)}.$$

Мы здесь использовали аддитивность пространств Соболева относительно разбиения области (см. замечание 3 пункта 4.4.1 в [20]) и определение соответствующей нормы.

Основные результаты

В дополнение к приведенным выше условиям на данные мы потребуем, чтобы:

$$|\det B(t)| \ge \delta_0 > 0 \ \forall t \in [0,T], \tag{15}$$

где $B(t)$ – матрица с элементами $b_{ij} = \int_\Gamma \langle u_0(x), \varphi_k\rangle(x)dx = \psi_k(0)$;

$$\int_G \langle u_0(x), \varphi_k\rangle(x)dx = \psi_k(x),\ k = 1,\dots,m; \tag{16}$$

(**A**) функция $B(0,x)u_0(x)|_\Gamma$ принадлежит линейной оболочке вектор-функций $\Phi_1(0,x),\dots,\Phi_m(0,x)$.

Основной результат работы – это следующая теорема (как и ранее $s = 1/2 - 1/2p$).

Теорема 3. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^2 и выполнены условия (9) – (12), (14) – (16) и условие (A). Тогда существует единственное решение $(u,\vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1,\dots,q_m)$)задачи (1) – (3) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $\vec{q} \in W_p^s(0,T)$. Решение удовлетворят оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} + \|\vec{q}\|_{W_p^s(0,T)} \le C(\|f\|_{L_p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} +$$
$$+ \textstyle\sum_{i=1}^m(\|\psi_i\|_{W_p^{1+s}(0,T)} + \|(f,\varphi_k)\|_{W_p^s(0,T)})).$$

Доказательство. Пусть $u \in W_p^{1,2}(Q)$ есть решение задачи (1) – (3), где $g = \sum_{i=1}^m q_i\Phi_i$. В силу условий (15) и (A) найдутся постоянные, определяемые единственным образом, такие, что $B(0,x)_{u_0}|_\Gamma = \sum_{i=1}^m q_i(0)\Phi_i(0,x)$. Положим $\sum_{i=1}^m q_i(0)\Phi_i(t,x) = g_0(t,x)$, и обозначим через $u \in W_p^{1,2}(Q)$ решение задачи (см. теорему 1)

$$Lu = f,\ B_{v|_S} = g_0(t,x),\ u|_{t=0} = u_0(x). \tag{17}$$

Пусть $\vec{q} \in W_p^s(0,T)$. По условиям $\Phi_j \in W_p^{s,2s}(S)$. Тогда по лемме 1 $q_i(t)\Phi_i(t,x) \in W_p^{s,2s}(S)$ и соответственно $g = W_p^{s,2s}(S)$. Сделаем замену $u = v + w$. Тогда функция $\omega \in W_p^{1,2}(Q)$ есть решение задачи

$$L\omega = 0,\ B_{\omega|_S} = g - g_0 = \overline{g},\ \omega|_{t=0} = 0. \tag{18}$$

Условие (3) преобразуется к виду

$$\int_G \langle\omega, \varphi_k(x)\rangle dx = \psi_k - \int_G \langle v(t,x), \varphi_k(x)\rangle dx = \psi_k,\ k = 1,2,\dots,m. \tag{19}$$

В силу условия (16), $\tilde{\psi}_k(0) = 0$ и по крайней мере $\tilde{\psi}_k(t) \in W_p^1(0,T)$. Ниже мы покажем, что $\tilde{\psi}_k(t) \in W_p^{1+s}(0,T)$. Умножим уравнение в (18) на $\varphi_k(x)$ и интегрируем по области G. Получим $(\omega_t, \varphi_k) = (L_0\omega, \varphi_k)$. Здесь $L_0\omega = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}\omega_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i\,\omega_{x_i} - a_0\omega$.

$$\tilde{\psi}'_k(t) = a(\omega,\varphi_k) - \int_\Gamma \langle\sigma\omega, \varphi_k\rangle\, d\Gamma + \textstyle\sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(t)\int_\Gamma \langle\Phi_i, \varphi_k\rangle d\Gamma,\ k = 1,\dots,m,\ \tilde{q}_i(t) = q_i(t) -$$
$$-q_i(0),$$

где $a(\omega,\varphi_k) = -\int_G \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}\omega_{x_j}, \varphi_{kx_i}\rangle + \langle(\sum_{i=1}^m a_i\omega_i), \varphi_k\rangle dx$. Последнее равенство можно записать в виде:

$$\textstyle\sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(t)\int_\Gamma \langle\Phi_i, \varphi_k\rangle\, d\Gamma = \tilde{\psi}'_k(t) - a(\omega,\varphi_k) + \int_\Gamma \langle\sigma\omega, \varphi_k\rangle d\Gamma \tag{20}$$

или в виде:

$$B\overrightarrow{q_a} = \vec{F},\ \vec{F} = (F_1,\dots,F_m)^T,\ F_k = \tilde{\psi}'_k - a(\omega,\varphi_k) + \int_\Gamma \langle\sigma\omega, \varphi_k\rangle d\Gamma, \tag{21}$$

где $\overrightarrow{q_a} = (\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_m)^T$. Функция ω, участвующая в (21), есть решение прямой задачи (18). Элементы матрицы B обладают тем свойством, что $b_{ij} \in W_p^s(0,T)$, более того справедлива очевидная оценка:

$$\|b_{ij}\|_{W_p^s(0,T)} \le \|\Phi_j\|_{L_p(\Gamma;W_p^s(0,T))}\|\varphi_i\|_{L_\infty(\Gamma)}.$$

Как было отмечено в доказательстве леммы 1, теоремы вложения гарантируют, что $W_p^s(0,T) \subset C([0,T])$. Следовательно, без ограничения общности можем считать, что $b_{ij} \in C([0,T])$. Используя условие (15), можем записать

$$\overrightarrow{q_a} B^{-1}\vec{F} = R(\overrightarrow{q_a}) = \vec{g} + R_0(\overrightarrow{q_a}), \tag{22}$$

где $\vec{g} = B^{-1}\Psi$ и k-я координата Ψ_k вектора Ψ имеет вид $\Psi_k(t) = \tilde{\psi}'_k(t)$. Это искомое уравнение для нахождения $\overrightarrow{q_a}$. Рассмотрим промежуток $[0,\delta] \subset [0,T]$. Оценим $\|R_0(\overrightarrow{q_a})\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}$. В силу второго и третьего утверждения леммы 1, элементы обратной матрицы B^{-1} также принадлежат классу $W_p^s(0,T)$. Тогда в силу оценки (7) из леммы 1 получим неравенство

$$\|R_0(\overrightarrow{q_a})\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c\sum_{k=1}^m (\|a(\omega,\varphi_k)\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} + \left\|\int_\Gamma \langle\sigma\omega,\varphi_k\rangle d\Gamma\right\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}). \tag{23}$$

Оценим каждое из слагаемых, входящих в $a(\omega,\varphi_k)$:

$$a(\omega,\varphi_k) = -\int_G \langle \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\omega_{x_j}, \varphi_{kx_i}\rangle + \langle\left(\sum_{i=1}^n a_i\,\omega_{x_i} + a_0\omega\right), \varphi_k\rangle dx.$$

В силу неравенства Минковского, неравенства Гельдера и леммы 1 имеем, что

$$\left\|\int_G \langle a_{ij}\omega_{x_j}, \varphi_{kx_i}\rangle\, dx\right\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c\int_G \|\nabla\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}\, dx \le c_1\left(\int_G \|\nabla\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} dx\right)^{1/p}. \tag{24}$$

Отметим, что

$$\int_G \|\nabla\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} dx = \int_G \int_0^\delta \frac{|\nabla\omega|^p}{t^{sp}}\, dt dx + \int_G \int_0^\delta\int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x)-\nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\, dt_1 dt_2 dx. \tag{25}$$

Здесь под $|\nabla\omega|$ понимаем $\sum_{i,j=1}^h |\nabla\omega_i|$, $\omega = (\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$. Воспользовавшись неравенством (вытекающем из равенства $[W_p^2(G), L_p(G)]_{1/2} = W_p^1(G)$, теорема 4.3.1 в [20])

$$\|\nabla\omega\|^p_{L_p(G)} \le c_2\|\omega\|^{1/2}_{W_p^2(G)}\|\omega\|^{1/2}_{L_p(G)},$$

для первого слагаемого в правой части имеем

$$\left\|\frac{1}{t^s}\nabla\omega\right\|_{L_p(Q^\delta)} \le c_2\|\omega\|^{1/2}_{L_p(0,\delta;W_p^2(G))}\left\|\frac{1}{t^{2s}}\omega\right\|^{1/2}_{L_p(Q^\delta)}.$$

Из формулы Ньютона-Лейбница имеем $\left\|\frac{1}{t^{2s}}\omega\right\|_{L_p(Q^\delta)} \le \delta^{1/p}\|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)}$. Тогда последнее неравенство записывается в виде

$$\left\|\frac{1}{t^s}\nabla\omega\right\|_{L_p(Q^\delta)} \le c_2\delta^{1/2p}\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}. \tag{26}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (25). Имеем

$$\int_G \int_0^\delta\int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x)-\nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}}\, dt_1 dt_2 dx \le \int_G \int_0^\delta\int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x)-\nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+p/2}}\, dt_1 dt_2 dx\delta^{1/2}. \tag{27}$$

Далее построим продолжение $P\omega$ функции ω из области G на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса такое, что P – линейный оператор, удовлетворяющий оценкам: $\|Pu\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n)} \le c_3\|u\|_{W_p^2(G)}$, $\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c_3\|u\|_{L_p(G)}$ для всех $u \in W_p^2(G)$ или соответственно $u \in L_p(G)$, где постоянная c не зависит от u. Такой оператор существует, например, это метод Хестенса продолжения функций (см. метод, описанный в лемме 2.9.3 в [20] для полупространства и многократно использованный позднее уже для произвольных областей). Имеем, что $P\omega \in W_p^{1,2}((0,\delta)\times\mathbb{R}^n)$ и $\|P\omega\|_{W_p^{1,2}((0,\delta)\times\mathbb{R}^n)} \le c_3\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}$, где постоянная c не зависит от ω и $\delta > 0$. Отметим, что $P\omega(0,x) = 0$. Имеем

$$\int_G \int_0^\delta\int_0^\delta \frac{|\nabla\omega(t_1,x)-\nabla\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+p/2}}\, dt_1 dt_2 dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\delta\int_0^\delta \frac{|\nabla P\omega(t_1,x)-\nabla P\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+p/2}}\, dt_1 dt_2 dx. \tag{28}$$

Сделаем замену переменных $t_i = \delta\tau_i$ $(i = 1,2)$, $x = \sqrt{\delta}y$. Тогда последний интеграл примет вид $(\tilde{P}\omega(\tau,y) = P\omega(\delta\tau,\sqrt{\delta}y))$.

$$I = \delta^{1-p+n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1\int_0^1 \frac{\left|\nabla_y\tilde{P}\omega(\tau_1,y)-\nabla_y\tilde{P}\omega(\tau_2,y)\right|^p}{|\tau_1-\tau_2|^{1+p/2}}\, d\tau_1 d\tau_2 dy. \tag{29}$$

Если $u \in W_p^{1,2}((0,1)\times\mathbb{R}^n)$, то (см., например, лемму 3.8 в [22], или вложения перед леммой 7.2 и лемму 7.2 в [23], или теорему 18.4 в [24]) $\nabla u \in W_p^{\frac{1}{2},1}((0,1)\times\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{W_p^{\frac{1}{2},1}((0,1)\times\mathbb{R}^n)} \le c_4\|u\|_{W_p^{1,2}((0,1)\times\mathbb{R}^n)},$$

где постоянная c_4 не зависит от u. Тогда интеграл в (29) оценивается через

$$I \le c_4^p \delta^{1-p+n/2} \|\tilde{P}\omega\|^p_{W_p^{1,2}((0,1)\times\mathbb{R}^n)} = c_4^p \delta^{1-p+n/2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\tilde{P}\omega_\tau\right|^p + \sum_{i,j=1}^n \left|(\widetilde{P_\omega})_{y_i y_j}\right|^p d\tau dy, \qquad (30)$$

где мы используем в $W_p^{1,2}((0,1)\times\mathbb{R}^n)$ – одну из эквивалентных норм. Возвращаясь к старым переменным (t,x) и используя вышеприведенную оценку для оператора P, получим

$$I \le c_5 \|\omega\|^p_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}, \qquad (31)$$

где постоянная c_5 не зависит от δ. Из (24)–(31) вытекает оценка

$$\left\| \int_G \langle a_{ij}\omega_{x_j}, \varphi_{kx_i}\rangle dx \right\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c_6 \delta^{1/2p} \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}, \qquad (32)$$

где постоянная c_6 не зависит от δ. Слагаемые вида $\int_G a_i\, \omega_{x_i}\varphi_k dx$ в выражении $a(\omega,\varphi_k)$ оцениваются точно так же. Слагаемое $J = \int_G a_0\omega\varphi_k dx$ оценивается проще. Имеем в силу леммы 1, что

$$\|J\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c \int_G \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} dx \le c_1 \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(G))}, \qquad (33)$$

$$\|\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(G))} = \int_G \int_0^\delta \frac{1}{t^{sp}} |\omega|^p dt dx + \int_G \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{|\omega(t_1,x)-\omega(t_2,x)|^p}{|t_1-t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2 dx. \qquad (34)$$

Используя представление $\omega(t_1,x) - \omega(t_2,x) = \int_{t_1}^{t_2} \omega_t\,(t,x)dt$ во втором интеграле и равенство $\omega(t,x) = \int_0^t \omega_\tau\,(\tau,x)d\tau$ в первом, а также неравенство Гельдера, получим оценку

$$\|\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(G))} = \|\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(G))} \le c_2 \|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)\delta^{1/2+1/2p}}. \qquad (35)$$

Тогда будем иметь, что

$$\left\| \int_G \langle a_0\omega, \varphi_k\rangle dx \right\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c\|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(G))} \le c_3 \|\omega_t\|_{L_p(Q^\delta)} \delta^{1/2+1/2p}, \qquad (36)$$

где c_3 – постоянная, не зависящая от δ. Легко увидеть, что в процессе доказательства оценок (26), (31), мы также получили неравенство

$$\|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;W_p^1(G))} \le c\delta^{1/2p} \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}, \qquad (37)$$

где постоянная c не зависит от δ. Действительно, используя определение нормы, мы получим

$$\|\omega\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;W_p^1(G))} = \int_0^\delta \left\| \frac{1}{t^s}\omega \right\|^p_{W_p^1(G)} dt + \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{\|\omega(t_1,x)-\omega(t_2,x)\|^p_{W_p^1(G)}}{|t_1-t_2|^{1+sp}} dt_1\, dt_2. \qquad (38)$$

Необходимая оценка первого слагаемого вытекает из оценок (28), (36). Оценка второго интеграла вытекает из оценок (27)-(31), (35).

Оценим последнее слагаемое $J_1 = \left\| \int_\Gamma \sigma\omega\varphi_k d\Gamma \right\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}$. Имеем, что

$$J_1 \le c \int_\Gamma \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} d\Gamma \le c_1 \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;L_p(\Gamma))} \le c_2 \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta;W_p^1(G))} \le c_3 \delta^{1/2p} \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)}. \qquad (39)$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гельдера, вложением $W_p^1(G) \subset L_p(\Gamma)$ и оценкой (37). Из оценок (23), (32), (36), (39) вытекает, что

$$\|R_0(\overrightarrow{q_a})\|_{\widetilde{W}_p^s} \le c_4 \delta^{1/2p} \|\omega\|_{\widetilde{W}_p^{1,2}(Q^\delta)}, \qquad (40)$$

где постоянная c_4 не зависит от δ. В силу теоремы 2 имеем, что

$$\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q^\delta)} \le c\|\tilde{g}\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(S^\delta)}. \qquad (41)$$

В силу леммы 1 имеет место оценка

$$\|\tilde{g}\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(S^\delta)} \le c_1 \sum_{i=1}^m \|\tilde{q}_i\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}.$$

Здесь постоянная c_1 зависит от величин $\|\Phi_i\|_{W_p^{s,2s}(S)}$. Тогда из (40), (41) получим оценку

$$\|R_0(\overrightarrow{q_a})\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} \le c_5 \delta^{1/2p} \sum_{i=1}^m \|\tilde{q}_i\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)} = c_5 \delta^{1/2p} \|(\overrightarrow{q_a})\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}, \qquad (42)$$

где постоянная c_5 не зависит от δ и $\overrightarrow{q_a}$. Оценка (42) говорит о том, что при $\delta^{1/2p}c_5 < 1$ оператор R_0 сжимающий и, следовательно, уравнение (22) имеет единственное решение из пространства $W_p^s(0,\delta)$ при условии, конечно, что $\psi'_k \in W_p^s(0,T)$. По условию $\psi'_k \in W_p^s(0,T)$. Покажем, что $\psi_{0k} =$

$\int_G \langle v(t,x), \varphi_k(x)\rangle dx \in W_p^{1+s}(0,T)$, т. е. $\int_G \langle v_t(t,x), \varphi_k(x)\rangle dx \in W_p^s(0,T)$. Умножим уравнение в (17) на φ_k и проинтегрируем по области G. Получим равенство

$$\psi'_{0k}(t) = a(v,\varphi_k) - \int_\Gamma \langle \sigma v, \varphi_k\rangle \, d\Gamma + \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(0) \int_\Gamma \langle \Phi_i, \varphi_k\rangle d\Gamma + (f,\varphi_k),\ k = 1,\dots,m. \tag{43}$$

Повторяя рассуждения, используемые при оценке нормы $\|R_0\overrightarrow{q_a}\|_{\widetilde{W}_p^s(0,\delta)}$, но только уже на всем промежутке [0,T], и вместо этой нормы берем стандартную норму в пространстве $W_p^s(0,\delta)$, можем легко показать, что правая часть в этом равенстве принадлежит пространству $W_p^s(0,T)$ и, таким образом, $\psi_{0k} \in W_p^{1+s}(0,T)$. Таким образом, уравнение (22) имеет единственное решение на промежутке $[0,\delta]$. Найдем решение $\omega \in W_p^{1,2}(Q^\delta)$ задачи (18). Покажем, что выполнены условия (19). Умножим уравнение в (18) на φ_k и интегрируем по области G. Используя (17), (18) и интегрирование по частям, получим

$$\int_G \omega_t \varphi_k dx = a(\omega,\varphi_k) - \int_\Gamma \langle \sigma\omega, \varphi_k\rangle \, d\Gamma + \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i(t) \int_\Gamma \langle \Phi_i, \varphi_k\rangle d\Gamma,\ k = 1,\dots,m.$$

Вектор-функция $\overrightarrow{q_a}$ удовлетворяет системе (20), складывая -е уравнение с полученным равенством и сокращая, придем к равенству

$$\int_G \omega_t \varphi_k dx = \tilde{\psi}'_k,\ k = 1,\dots,m,$$

интегрируя которое по t и пользуясь начальным условием, получим (19) на $[0,\delta]$.

Покажем далее, что решение продолжимо на весь промежуток [0,T]. Мы определили вектор-функцию $\overrightarrow{q_a}$ только на $[0,\delta]$. Продолжим найденную вектор-функцию $\overrightarrow{q_a}$ нулем при $t < 0$ и положим $\overrightarrow{q_a} = \begin{cases} \overrightarrow{q_a}(t), t \in (0,\delta) \\ \overrightarrow{q_a}(2\delta - t), t \in [\delta, T] \end{cases}$. Координаты вектора $\overrightarrow{q_b}$ обозначим через $q_1^b, \dots, q_m^b$. Построенная вектор-функция принадлежит $W_p^{s,2s}(S)$. Сделаем замену $\vec{q}^1 = \overrightarrow{q_a} - \overrightarrow{q_b}$. Построенная вектор-функция с координатами q_i^1 удовлетворяет системе

$$\sum_{i=1}^m q_i^1(t) b_{ki} = \tilde{\psi}'_k(t) - a(\omega,\varphi_k) + \int_\Gamma \langle \sigma\omega, \varphi_k\rangle \, d\Gamma - \sum_{i=1}^m q_i^b(t) b_{ki}. \tag{44}$$

В силу определения $\overrightarrow{q_b}$ правая часть в этом равенстве и соответственно вектор $\vec{q}^1$ обращаются в ноль на $[0,\delta]$. Пусть ω_0 – решение задачи

$$L\omega_0 = 0,\ B\omega_{0|S} = \sum_{i=1}^m q_i^b \Phi_i,\ \omega_{0|t=0} = 0. \tag{45}$$

Тогда функция $\omega_1 = \omega - \omega_0$ есть решение задачи

$$L\omega_0 = 0,\ B\omega_{1|S} = \sum_{i=1}^m q_i^1 \Phi_i,\ \omega_{1|t=0} = 0. \tag{46}$$

В силу теоремы 1, $\omega_1 = 0$ при $t \in [0,\delta]$. Таким образом, задача о продолжении вектор-функции $\overrightarrow{q_a}$ сводится к построению решения системы

$$\sum_{i=1}^m q_i^1(t) b_{ki} = \psi'_{1k}(t) - a(\omega_1,\varphi_k) + \int_\Gamma \langle \sigma\omega_1, \varphi_k\rangle \, d\Gamma, \tag{47}$$

где

$$\psi'_{1k} = \tilde{\psi}'_k(t) - a(\omega_0,\varphi_k) + \int_\Gamma \langle \sigma\omega_0, \varphi_k\rangle d\Gamma - \sum_{i=1}^m q_i^b(t) b_{ki},$$

и функция ω_1 – решение задачи (46). Решение системы при $t \le \delta$ обращается в ноль. Мы пришли к той же системе, но нулевые данные Коши у нас уже задаются в точке $t = \delta$, и изменилась правая часть системы, точнее вектор $\vec{g}$. Далее мы повторяем рассуждения и оценки уже на промежутке $[\delta, 2\delta]$. Рассуждения те же самые, и более того без ограничения общности можем считать, что и все постоянные, возникающие при оценке нормы оператора R_0, также те же самые. Таким образом, система (47) разрешима на промежутке $[\delta, 2\delta]$. Повторяя рассуждения на $[2\delta, 3\delta]$ и т. д., мы построим решение на всем $[0,T]$. Оценка из утверждения теоремы фактически была получена в процессе доказательства.

Литература

1. Алифанов, О. М. Обратные задачи сложного теплообмена [Текст] / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхов, А. В. Ненароком. – Москва : Янус-К, 2009.

2. Ozisik, M. N. Inverse heat transfer [Text] / M. N. Ozisik, H. A. B. Orlando. – New-York : Taylor & Francis, 2000.

3. Костин, А. Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения, I. [Текст] / А. Б. Костин, А. И. Прилепко // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 1. – С. 1319–1328.

4. Борухов, В. Т. Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса [Текст] / В. Т. Борухов, В. И. Корзюк // Вестник Белорусского университета. – 1998. – Сер. 1, № 3. – С. 54–57.

5. Tryanin, A. P. Determination of heat-transfer coefficients at the inlet into a porous body and inside it by solving the inverse problem [Text] / A. P. Tryanin // Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal. – 1987. – Vol. 52, № 3. – Pp. 469–475.

6. Борухов, В. Т. Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам [Текст] / В. Т. Борухов, П. Н. Вабищевич, В. И. Корзюк // Инжин.-физический журнал. – 2000. – Т. 73, № 4. – С. 742–747.

7. Короткий, А. И. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции несжимаемой жидкости [Текст] / А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов // Тр. ИММ ДВО АН. – 2006. – Т. 12. – С. 88–97.

8. Абылкаиров, У. У. Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения [Текст] / У. У. Абылкаиров // Математический журнал. – 2003. – Т. 3, № 4(10). – С. 5–12.

9. Абылкаиров, У. У. Обратная задача для системы тепловой конвекции [Текст] / У. У. Абылкаиров, А. А. Абиев, С. Е. Айтжанов // Молодежная международная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск, 2009. – С. 10–11.

10. Кожанов, А. И. Линейные обратные задачи для некоторых классов нелинейных нестационарных уравнений [Текст] / А. И. Кожанов // Сиб. электр. известия. – 2015. – Т. 12. – С. 264–275.

11. Iskenderov, A. D. Inverse problem for a linear system of parabolic equations [Text] / A. D. Iskenderov, A.Ya. Akhundov // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 79, № 1. – Pp. 73–75.

12. Ismailov, M. I. Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data [Text] / M. I. Ismailov, F. Kanca // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2012. – Vol. 20, № 24. – P. 463–476.

13. Jing Li, Youjun Xu An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation [Text] / Jing Li // J. Appl. Math. Comput. – 2010. – Vol. 34. – Pp. 195–206.

14. Kerimov, N. B. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions [Text] / N. B. Kerimov, M. I. Ismailov // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – № 396, № 2. – Pp. 546–554.

15. Кожанов, А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени [Текст] / А. И. Кожанов // Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. – 2005. – Т. 45, № 12. – С. 2168–2184.

16. Пятков, С. Г. Об определении функции источника в математических моделях конвекции-диффузии [Текст] / С. Г. Пятков, А. Е. Сафонов // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 2. – С. 117–130.

17. Криксин, Ю. А. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии [Текст] / Ю. А. Криксин, С. Н. Плющев, Е. А. Самарская [и др.] // Матем. моделирование. – 1995. – Т. 7, № 11. – С. 95–108.

18. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics [Text] / A. I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I. A. Vasin. – New-York : Marcel Dekker, Inc, 1999.

19. Ivanchov, M. Inverse problems for equations of parabolic type [Text] / M. Ivanchov // Math. Studies. Monograph Series. V. 10. – Lviv: WNTL Publishers, 2003.

20. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы [Текст] / Х. Трибель. – Москва : Мир, 1980.

21. Ladyzhenskaya, O. A. Linear and quasi-linear equations of parabolic type [Text] : Translations of Mathematical Monographs / O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva ; 23. American Mathematical Society. – Providence: AMS, RI, 1968.

22. Denk, R. Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data [Text] / R. Denk, M. Hieber, J. Pruss // Math. Z. – 2007. – Vol. 257, № 1. – Pp. 193–224.

23. Grisvard, P. Equations differentielles abstraites [Text] / P. Grisvard // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^{e} series. – 1969. – Vol. 2. – Pp. 311–395.

24. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения [Текст] / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – Москва : Наука, 1975.

25. Пятков, С. Г. Обратные задачи об определении граничных данных [Текст] / С. Г. Пятков, М. А. Вержбицкий // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23, № 2. – С. 3–18.

26. Amann, H. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary-value problems [Text] / H. Amann // in: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis (Friedrichroda, 1992), – 1993. – Vol. 133. – Pp. 9–126.