ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 г. Выпуск 3 (38). С. 51–57

УДК 517.956

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА

Е. М. Короткова

Введение

Пусть G – ограниченная область в R^n с границей Γ класса C^{2m} и $Q = (0,T) \times G$. Параболическое уравнение имеет вид:

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)q_i(t,x') + f, (t,x) \in Q, x = (x',x''), \tag{1}$$

где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$, b_i, $i = 1,2,\dots,r$, и f – заданные вектор-функции, причем компоненты векторов b_i начиная с номера $r_0 + 1$ $(r_0 < h)$ равны 0. A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t,x,D) = \sum_{i=r+1}^{sr_0} q_i(t,x')\, A_i(t,x,D_x) + A_{sr_0+1}(t,x,D_x),$$

$$A_i = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_{i\alpha}(t,x) D^\alpha, i = r+1, \dots, sr_0+1, D = \left(\partial_{x_{\{1\}}}, \partial_{x_{\{2\}}}, \dots, \partial_{x_{\{n\}}}\right).$$

Неизвестными в (1) являются решение u и функции $q_i(t,x')$ $(i = 1, 2, \dots, sr_0,\ sr_0 \ge r)$, входящие как в правую часть (1), так и в оператор A как коэффициенты. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, B_j u|_S = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(t,x) D^\beta u|_S = g_j(t,x), \tag{2}$$

где $m_j < 2m$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $S = (0,T) \times \Gamma$.

Обозначим через $P_0 a$ вектор длины $r_0 < h$, координаты которого совпадают с первыми r_0 координатами исходного вектора a длины h. Оператор P_0 отождествляем с оператором умножения на матрицу размерности $r_0 \times h$, полученную из единичной $h \times h$ – матрицы путем удаления строк с номерами $r_0 + 1, \dots, h$. Условия переопределения для нахождения функций q_i имеют вид

$$P_0 u|_{S_i} = \psi_i(t,x'), (S_i = (0,T) \times \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s), \tag{3}$$

где $\{\Gamma_i\}$ – множество гладких -мерных поверхностей, лежащих в G, и ψ_i, $i = 1, 2, \dots, s$, – заданные вектор функции.

Большое количество обратных коэффициентных задач с условиями переопределения вида (3) при $k = n - 1$ для параболических уравнений второго порядка было рассмотрено в работах Белова Ю.Я., Аниконова Ю.Е. и ряда других авторов (см. библиографию в [1]). В случае $n = 1$ и $k = 0$ линейные и нелинейные задачи такого вида рассматривались, например, в [2]. В этом случае неизвестные функции q_i зависят только от t, и поверхности S_i – точки. Можно отметить работы [3], [4], где были рассмотрены задачи вида (1), (2) в общей постановке.

Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и многих других. Много работ посвящено различным модельным задачам. Одной из моделей, возникающей при описании процессов тепломассопереноса, является система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями для температуры и концентраций переносимых веществ. По данным измерений на сечениях канала или некоторым другим характеристикам определяются те или иные параметры в задаче (коэффициенты уравнений) или плотности источников (правая часть) (см., например, [5], [6], [7], [8]).

В данной работе при выполнении определенных условий получена локальная корректность, т.е. существование, единственность и непрерывная зависимость решений от данных задачи (1) – (3). Полученные результаты, в целом, аналогичны тем, которые были получены в работе [3] и обобщают эти результаты на случай, когда в условиях переопределения задается лишь часть вектора решений.

Определения, обозначения и формулировка основного результата

В работе используются пространства $L_p(G)$, пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^k(\bar{G})$, пространства Соболева $W_p^s(G;E)$, Бесова $B_{\{p,p\}}^s(G;E)$, определение которых может быть найдено, например, в [9] и [10]. Принадлежность $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\bar{G})$) для заданной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая компонента u_i принадлежит $W_p^s(G)$ (или $C^k(\bar{G})$). Норма в соответствующем пространстве – сумма норм координат, если не указано другое. Аналогичное соглашение используется и для матриц. Для заданного интервала $J = (0,T)$, положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^r(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^s(G))$ и $W_p^{s,r}(S) = W_p^r(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^s(\Gamma))$.

Опишем класс областей G. Будем считать, что $\Gamma = \partial G \in C^{2m}$ (определение может быть найдено в [10]). Зафиксируем параметр $p > n + 2m$. Пусть $B_r(x_0)$ – шар радиуса r с центром в точке x_0. Запишем условия на область G и поверхности Γ_i:

(A) а) Случай $k \geq 1$. Существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ с границей класса C^{2m}, такая, что $G \subset \Omega \times \mathbb{R}^{n-k}$,

$$\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x'' = \varphi^i(x') = \left(\varphi_{k+1}^i(x'), \varphi_{k+2}^i(x'), \dots, \varphi_n^i(x')\right), \mathrm{x}' \in \Omega\},$$

$\varphi^i(x') \in C^{2m}(\overline{\Omega})$ при всех $i = 1, 2, \dots, s$ и существует константа $\delta > 0$ такая, что

$$U_{\delta i} = \{\left(x', \varphi^i(x') + \eta\right) : x' \in \Omega, \eta \in \mathbb{R}^{n-k}, |\eta| < \delta\} \subset G, U_{\delta i} \cap U_{\delta j} = \emptyset,$$

для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, s$.

б) Случай $k = 0$. В этом случае в качестве множеств $\{\Gamma_\mathrm{i}\}_{i=1}^s$ берем внутренние точки $\{x_i\}_{i=1}^s$ области G. Положим $U_{\delta i} = B_\delta(x_i)$ и выберем число $\delta > 0$ такое, что $U_{\delta i} \subset G$ и $U_{\delta i} \cap U_{\delta j} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, s$.

Условие (A) носит геометрический характер; оно используется во всех работах, посвященных рассматриваемым обратным задачам. Условие (A) выполнено, например, если $G = \Omega \times \mathbb{R}^{n-k}$, где Ω ограниченная область класса C^{2m}.

В дальнейшем, используются следующие обозначения: $Q^\tau = (0,\tau) \times G$, $S^\tau = (0,\tau) \times \partial G$, $Q_0 = (0,T) \times \Omega$, $Q_0^\tau = (0,\tau) \times \Omega$, $S_0 = (0,T) \times \partial\Omega$, $G_\delta = \cup_i U_{\delta i}$, $\Gamma_\delta = \Gamma \cap \partial G_\delta$, $S_\delta = (0,T) \times \Gamma_\delta$, $Q_{\delta i} = (0,T) \times U_{\delta i}$, $Q_\delta = (0,T) \times G_\delta$ и $Q_\delta^\tau = (0,\tau) \times G_\delta$.

Далее будем считать, что выполнены следующие условия.

Условия согласования и гладкости данных

$$\exists \Phi(t,x) \in W_p^{1,2m}(Q) : \Phi|_{t=0} = u_0(x), B_j\Phi|_S = g_j, (j = 1, \dots, m), \tag{4}$$

$$\partial_{x_i}\Phi \in W_p^{1,2m}(Q_\delta), P_0\Phi|_{S_j} = \psi_j(t,x') \in C\left([0,T]; C^{2m}(\overline{\Omega})\right), \psi_{jt} \in C(\overline{Q_0}), \tag{5}$$

$$f \in L_p(Q), \partial_{x_i} f \in L_p(Q_\delta), f|_{S_j} \in C(\overline{Q_0}), \tag{6}$$

где $j = 1, 2, \dots, s$, $i = k+1, \dots, n$ и δ – постоянная из условия (A).

Как следствие условий (4) – (6) и известных теорем вложения имеем

$$u_0(x) \in W_p^{2m - \frac{2m}{p}}(G), g_j \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S),$$
$$k_j = (2m - m_j - 1/p)/(2m), \tag{7}$$

$$\partial_{x_i} g_j \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S_\delta), \partial_{x_i} u_0(x) \in W_p^{2m - \frac{2m}{p}}(G_\delta), j = 1, 2, \dots, m, i = k+1, \dots, n. \tag{8}$$

Эти условия при выполнении условий согласования гарантируют существование функции Φ с вышеуказанными свойствами (4) – (5). Она определяется не единственным образом и может быть построена при помощи теорем о продолжении краевых условий внутрь области, если данные задачи удовлетворяют соответствующим условиям согласования.

Условия на коэффициенты операторов A, B_j более или менее стандартные. Считаем, что

$$a_{j\alpha}(t,x) \in L_\infty(Q)\ (|\alpha| < 2m),$$
$$a_{j\alpha} \in C(\bar{Q})\ (|\alpha| = 2m, j = r+1,\dots,sr_0+1), \tag{9}$$
$$b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\bar{S})\ (j = 1,\dots,m, |\beta| \le m_j), \tag{10}$$
$$b_j(t,x) \in L_\infty(Q), \partial_{x_i} b_j(t,x) \in L_\infty(Q_\delta)\ (j = 1,2,\dots,r, i \ge k+1),$$
$$\partial_{x_i} a_{j\alpha}(t,x) \in L_\infty(Q_\delta)\ (|\alpha| \le 2m), j = r+1,\dots,sr_0+1),$$
$$\partial_{x_i} b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\overline{S_\delta})\ (j = 1,\dots,m, |\beta| \le m_j, i \ge k+1). \tag{11}$$

Будем искать функции q_i в классе непрерывных функций. В связи с этим потребуем также, чтобы

$$a_{i\alpha}(t,x',\varphi^j(x')), b_l(t,x',\varphi^j(x')) \in C(\overline{Q_0}), \tag{12}$$

при всех $l = 1,\dots,r$, $j = 1,2,\dots,s$ и $|\alpha| < 2m$.

Рассмотрим матрицу $B_\Phi(t,x')$ размера $sr_0 \times sr_0$, строчки которой с номерами от $(j-1)r_0+1$ до jr_0 занимают вектор столбцы

$$(-P_0 b_1(t,x),\dots,-P_0 b_r(t,x), P_0 A_{r+1}\Phi(t,x),\dots,P_0 A_{sr_0}\Phi(t,x))|_{x''=\varphi^{\{j\}}(x')}.$$

Элементы этой матрицы непрерывны и, в частности, вышеприведенные вектора-столбцы в точке $t=0$ превращаются в столбцы

$$\left(-P_0 b_1(0,x),\dots,-P_0 b_r(0,x), P_0 A_{r+1} u_0(x),\dots,P_0 A_{sr_0} u_0(x)\right)|_{x''=\varphi^j(x')}.$$

Потребуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\det B_\Phi(0,x') \ge \delta_0\ \forall x' \in \Omega. \tag{13}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$B_\Phi(t,x')\overrightarrow{q^0} = \vec{g}(t,x'), \overrightarrow{q^0} = (q_1^0, q_2^0,\dots,q_{sr_0}^0), \tag{14}$$

где $\vec{g}$ – вектор-столбец, координаты которого с номерами от $(j-1)r_0+1$ до jr_0 представляют собой вектор

$$P_0(f(t,x',\varphi^j(x')) - A_{sr_0+1}\Phi(t,x',\varphi^j(x')) - \psi_{jt}(t,x')).$$

При выполнении условия (13), по крайнем мере при $t=0$, система (14) имеет единственное решение $\overrightarrow{q^0}(0,x') = (q_1^0(0,x'),\dots,q_{sr_0}^0(0,x')) = \left(B_\Phi(0,x')\right)^{-1}\vec{g}(0,x')$.

Приведенные выше условия на данные задачи гарантируют, что $\overrightarrow{q^0} \in C(\bar{\Omega})$.

Рассмотрим операторы

$$A^0(t,x,D) = \textstyle\sum_{i=r+1}^{sr_0} q_i^0(0,x')A_i(t,x,D_x) + A_{sr_0+1},$$
$$A_0^0(t,x,D) = \textstyle\sum_{i=r+1}^{sr_0} q_i^0(0,x')A_{0i}(t,x,D_x) + A_{0sr_0+1},$$

где $A_{0i}(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_{i\alpha}(t,x)\xi^\alpha$, и предположим, что оператор $\partial_t + A_0$ параболичен, т.е. найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена $\det(A_0^0(t,x,i\xi) + pE) = 0$ (E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Re}p \le -\delta_1|\xi|^{2m}\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n, \forall(x,t) \in Q. \tag{15}$$

Условие Лопатинского представляется в следующем виде: для любой точки $(t_0,x_0) \in S$ запишем операторы A_0^0 и B_{j0} ($B_{j0} = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta} D^\beta$), вычисленные в данной точке в локальной системе координат y и предположим, что система

$$(\lambda E + A_0^0(i\xi',\partial_{y_n}))v(y_n) = 0, B_{j0}(i\xi',\partial_{y_n})v|_{y_n=0} = h_j \in, \tag{16}$$

$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, \dots, m$ имеет единственное решение в $C(\overline{\mathbb{R}^+}; \mathbb{C}^h)$, убывающее на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda| \le \pi/2$ и $h_j \in \mathbb{C}^h$, таких, что $|\xi'| + |\lambda| \ne 0$.

Зафиксируем $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ и перейдем в области $Q_{\delta_1 i}$, $\delta_1 < \delta$, к переменным $y' = x'$, $y'' = x'' - \varphi^i(x')$, $t = t$. При такой замене операторы A и B_j перейдут в некоторые операторы $A^i(t, y, D_y)$ и $B_j^i(t, y, D_y)$. Обозначим через $A_{y'}^i$ и $B_{jy'}^i$ части операторов A^i и B_j^i, не содержащие производных по переменным $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n$, а через $A_{y''}^i$ и $B_{jy''}^i$ – остатки. Аналогичный смысл имеют обозначения $A_{x'}$, $B_{jx'}$, $A_{x''}$, $B_{jx''}$, $A_{0x'}$, $A_{0x''}$. Опишем связь между производными в новых и старых переменных. Имеем:

$$\partial_{x_j} = \partial_{y_j} - \sum_{r=k+1}^{n} \varphi_{r y_j}^i(y') \partial_{y_r} \ (j \le k), \partial_{x_j} = \partial_{y_j} \ (j > k),$$

$$\partial_{y_j} = \partial_{x_j} + \sum_{r=k+1}^{n} \varphi_{r x_j}^i(x') \partial_{x_r} \ (j \le k), \partial_{y_j} = \partial_{x_j} \ (j > k).$$

Таким образом,

$$A_{y'}^i(t, y, D_{y'}) = A_{x'}(t, y', y'' + \varphi^i(y'), D_{y'}),$$

$$B_{jy'}^i\big(t, y, D_{y'}\big) = B_{jx'}\big(t, y', y'' + \varphi^i(y'), D_{y'}\big).$$

Отсюда видно, что при переходе к новым переменным вид операторов $A_{x'}$ и $B_{jx'}$ не меняется. Рассмотрим оператор A^0. Фиксируем $i = 1,2, \dots, s$. Сделаем замену переменных $y'' = x'' - \varphi^i(x')$, $y' = x'$. Пусть $\{a_{lm}(t, y', 0, D_{y'})\}_{l,m=1}^h$ и $\{b_{lm}(t, y', 0, D_{y'}\}_{l,m=1}^h$ элементы матриц $A_{y'}^0(t, y', 0, D_{y'})$ и $B_{jy'}(t, y', 0, D_{y'})$ соответственно. Обозначим через $\widetilde{A_{y'}}$ матричный оператор с элементами $\{a_{lm}\}_{l,m=1}^{r_0}$, а через $\widetilde{B_{jy'}}$ – матричный оператор с элементами $\{b_{lm}\}_{l,m=1}^{r_0}$. По определению, $A = \sum_{k=r+1}^{sr_0} q_k A_k + A_{sr_0+1}$. После замены получим операторы $A_k^i = A_{ky'}^i + A_{ky''}^i$ $(k = r + 1, \dots, sr_0 + 1)$. Для произвольного вектора a длины h обозначим через $P_1 a$ – вектор размера h, получаемый из вектора a длины h путем замены нулями его первых r_0 координат. Таким образом, P_1 – оператор умножения на матрицу, полученную из единичной матрицы путем замены нулями первых r_0 строк.

Предположим, что

$$\deg P_0 A_{ky'}^i(t, y', 0) P_1 < 2m \ (i = 1,2, \dots, s, k = r + 1, \dots, sr_0). \tag{17}$$

Неравенство (17) означает, что порядок любого дифференциального оператора входящего в матричный дифференциальный оператор $P_0 A_{ky'}^i(t, y', 0) P_1$ меньше $2m$.

(B) для любого $i = 1, \dots, s$ оператор $\partial_t + \widetilde{A_{y'}^i}(t, y', 0, D_{y'})$ параболичен в области Q_0, и выполнено условие Лопатинского для операторов $\widetilde{A_{y'}^i}(t, y', 0, D_{y'})$, $\widetilde{B_{ky'}^i}(t, y', 0, D_{y'})$ $(k = 1, \dots, m)$ в Q_0.

Сформулируем, наконец, теорему существования. Она получена при выполнении определенных дополнительных ограничений на граничные операторы. Эти дополнительные условия по существу и при их нарушении возможно отсутствие решений (см. пример, приведенный в конце работы [3]).

Теорема

Пусть условия (A), (B), (4) – (6), (9) – (12), (13), (15) – (17) выполнены. Если $P_0 B_{iy''}^j(t, y', 0, D_y) = 0$ *и* $P_0 B_{iy'}^j(t, y', 0, D_y) P_1 = 0$ *на* S_0 *для всех* $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, s$, *то для некоторого* $\tau_0 \le T$ *существует единственное решение* $(u, q_1, \dots, q_{sr_0})$ *задачи (1) – (3), отвечающее этим данным, из класса*

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}) \colon \nabla_{x''} u \in W_p^{1,2m}\left(Q_{\delta_2}^{\tau_0}\right) \forall \delta_2 < \delta, q_j \in C\left(\overline{Q_0^{\tau_0}}\right),$$

$$j = 1, 2, \dots, sr_0.$$

Работа поддержана грантом РФФИ №15-01006582.

Литература

1. Belov, Ya.Ya. Inverse problems for parabolic equations / Utrecht: VSP, 2002

2. Ivanchov, M. Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies. Monograph Series, 10 (2003).

3. Pyatkov, S.G., Samkov, M.L. On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations. // Sib. Adv. in Math. – 2012. – № 4 (22), – С. 287–302.

4. Pyatkov, S.G. On some classes of inverse problems for parabolic equations. // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2011, – № 8 (18). – С. 917–934.

5. Capatina, A., Stavre, R. A control problem in biconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. – 1997. – №4 (37). – С. 585–595.

6. Babeshko, O. M., Evdokimova, O. V., Evdokimov, S. M. On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants // Dokl. Math. – 2000. – № 2 (61). – С. 283–285.

7. Калинина, Е. А. Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный матем. жур. – 2004. – № 1 (5). – С. 89–99.

8. Криксин, Ю.А., Плющев, С.Н., Самарская, Е.А, Тишкин, В.Ф. Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции–диффузии // Матем. моделирование. – 1995. – № 11 (7). – С. 95–108.

9. Triebel, H. Interpolation Theory. Function Spaces. Di_erential Operators. // Berlin. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1978.

10. Ladyzhenskaya, O.A.; Solonnikov, V.A.; Ural'tseva, N.N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. // Translations of Mathematical Monographs. № 23. American Mathematical Society (AMS). Providence. RI. 1968.