УДК 519.63
DOI 10.18822/byusu20250369-76

РАСЧЕТ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКЕ

Эбель Светлана Ивановна
инженер кафедры математического и компьютерного моделирования Института естественных и точных наук,
Южно-Уральский государственный университет,
Челябинск, Россия
E-mail: ebelsi@susu.ru

Ушаков Андрей Леонидович
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры математического и компьютерного моделирования Института естественных и точных наук,
Южно-Уральский государственный университет,
Челябинск, Россия
E-mail: ushakoval@susu.ru

Предмет исследования: математическая модель изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке.

Цель исследования: разработать асимптотически оптимальный метод решения эллиптической краевой задачи четвертого порядка в области геометрически сложной формы при наличии краевого условия Дирихле.

Метод исследования: в работе развивается метод итерационных расширений для нахождения изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке на упругом основании.

Объект исследования: изгиб пластины, описываемый математической моделью в виде эллиптической краевой задачи четвертого порядка в области геометрически сложной формы при обязательном наличии краевого условия Дирихле.

Основные результаты исследования: был разработан метод, асимптотически оптимальный по количеству операций, на основе метода итерационных расширений для расчета изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке. Решаемая задача фиктивно продолжалась, продолженная задача аппроксимировалась методами конечных элементов и аппроксимации по частям. Решение дискретной продолженной задачи итерационно приближалось решениями расширенных задач. Асимптотическая оптимальность предложенного метода экспериментально подтверждена при расчетах на ЭВМ.

Ключевые слова: изгиб пластины, метод итерационных расширений.

CALCULATION OF PLATE BENDING UNDER LONGITUDINAL-TRANSVERSE LOAD

Svetlana I. Ebel
Engineer of the Department of Mathematical and Computer Modeling Institute of Natural and Exact Sciences,
South Ural State University,
Chelyabinsk, Russia
E-mail: ebelsi@susu.ru

Andrey L. Ushakov
Doctor of Physics and Mathematics,
Associate Professor,
Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling Institute of Natural and Exact Sciences,
South Ural State University,
Chelyabinsk, Russia
E-mail: ushakoval@susu.ru

Subject of research: mathematical model of plate bending under longitudinal-transverse load.

Purpose of research: to develop an asymptotically optimal method for solving a fourth-order elliptic boundary value problem in a geometrically complex domain in the presence of a Dirichlet boundary condition.

Research method: the paper develops a method of iterative extensions to find the bending of a plate under longitudinal and transverse load on an elastic base.

Object of research: the bending of a plate described by a mathematical model in the form of an elliptical boundary value problem of the fourth order in a field of geometrically complex shape with the obligatory presence of a Dirichlet boundary condition.

Research findings: a method was developed that is asymptotically optimal in terms of the number of operations, based on the iterative expansion method for calculating plate bending under longitudinal-transverse load. The problem being solved continued fictitiously, the continued problem was approximated by finite element methods and partial approximation. The solution of a discrete extended problem was iteratively approached by solutions of extended problems. The asymptotic optimality of the proposed method has been experimentally verified by computer calculations.

Keywords: plate bending; iterative extension method.

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотически оптимальный метод фиктивных областей был разработан в [1] для решения эллиптического уравнения второго порядка при краевом условии Неймана. Актуальна необходимость разработки асимптотически оптимального метода решения эллиптического уравнения четвертого порядка при наличии краевого условия Дирихле в области со сложной геометрией, что теоретически считается возможным [2]. Такого типа задача Дирихле для уравнения, только второго порядка, была асимптотически оптимально решена, но достаточно сложным методом фиктивного пространства [3]. В данной работе метод итерационных расширений развивается для решения эллиптической краевой задачи четвертого порядка, применяемой при моделировании изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке, используя работы [4; 5].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Постановки задачи: смешанная краевая задача для эллиптического уравнения четвертого порядка, которая описывает изгиб пластины при продольно-поперечной нагрузке при обязательном наличии краевого условия Дирихле.

$$u: \Delta^2\breve{u} + \rho\Delta\breve{u} + a\breve{u} = \breve{f}|\Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^2, a, \rho \geq 0,$$
$$\breve{u} = \frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{v}}|\gamma_0 = 0, \breve{u} = l_1\breve{u}|\gamma_1 = 0, \frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{v}} = l_2\breve{u}|\gamma_2 = 0, l_1\breve{u} = l_2\breve{u}|\gamma_3 = 0, \quad (1)$$

если граница области Ω является замыканием объединения открытых и непересекающихся частей

$$\partial\Omega = s, s = \overline{\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3}, \gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 0,1,2,3,$$

здесь используем дифференциальные операторы

$$l_1\breve{u} = \Delta\breve{u} + (1-\sigma)n_1n_2\breve{u}_{xy} - n_2^2\breve{u}_{xx} - n_1^2\breve{u}_{yy},$$
$$l_2\breve{u} = \frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial\vec{v}} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial\vec{s}}(n_1n_2(\breve{u}_{yy} - \breve{u}_{xx}) + (n_1^2 - n_2^2)\breve{u}_{xy}) + \rho\frac{\partial\breve{u}}{\partial\vec{v}}$$

и

$$n_1 = -\cos(\vec{v}, x), n_2 = -\cos(\vec{v}, y), \sigma \in [0; 1).$$

В механике решение задачи u – функция прогиба пластины, правая часть в уравнении $\breve{f}$ – нагрузка при поперечном давлении, коэффициенты в приведенном уравнении $a,\rho \geq 0$, σ – коэффициент Пуассона, Ω – ограниченная область, $\vec{v}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\vec{s}$ – касательная к $\partial\Omega$.

Краевая задача рассматривается в вариационной формулировке:

$$\breve{u} \in \breve{H}: \Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = F(\breve{v}) \forall\breve{v} \in \breve{H}, F \in \breve{H}', \quad (2)$$

а пространство ее решений есть функции в пространстве Соболева

$$\breve{H} = \breve{H}(\Omega) = \left\{\breve{v} \in W_2^2(\Omega): \breve{v}|_{\gamma_0\cup\gamma_1} = 0, \frac{\partial\breve{v}}{\partial\vec{v}}|\gamma_0 \cup \gamma_2 = 0\right\},$$

билинейная форма

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) =$$
$$= \int_\Omega (\sigma\Delta\breve{u}\Delta\breve{v} + (1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx} + 2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy} + \breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy}) - \rho(\breve{u}_x\breve{v}_x + \breve{u}_y\breve{v}_y) + a\breve{u}\breve{v})d\Omega,$$

правая часть задачи при $\breve{f} \in L_2(\Omega)$ – линейный функционал

$$F(\breve{v}) = (\breve{u}, \breve{v}) = \int_\Omega \breve{f}\breve{v}d\Omega.$$

Для задачи из (2) достаточно обычно предположение, что билинейная форма порождает эквивалентную нормировку в пространстве решений:

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): c_1\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leq \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Omega)} \forall\breve{v} \in \breve{H}.$$

Это предположение обеспечивает существование единственности решения этой задачи [6].

Рассматриваем при навешиваемом индексе ω=1 решаемую краевую задачу в вариационном виде, а при навешиваемом индексе $\omega = II$ вводим фиктивную краевую задачу в вариационном виде

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega: \Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega) \forall\breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega, F_\omega \in \breve{H}'_\omega, \omega \in \{1, II\}, \Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

если правые части у приведенных выше задач, когда заданные функции $\breve{f}_\omega \in L_2(\Omega_\omega)$ задаются как функционалы

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega\breve{v}_\omega d\Omega_\omega \forall\breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega, \breve{f}_{II_1} = 0,$$

билинейные формы

$$\Lambda_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int_{\Omega_\omega} (\sigma_\omega\Delta\breve{u}_\omega\Delta\breve{v}_\omega + (1-\sigma_\omega)(\breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega xx} + 2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy}$$
$$+ \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega yy}) + -\rho_\omega(\breve{u}_{\omega x}\breve{v}_{\omega x} + \breve{u}_{\omega y}\breve{v}_{\omega y}) + a_\omega\breve{u}_\omega\breve{v}_\omega)d\Omega_\omega,$$

пространства их решений есть функции из пространств Соболева

$$\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{\breve{v}_\omega \in W_2^2(\Omega_\omega): \breve{v}_\omega|_{\gamma_{\omega,0}\cup\gamma_{\omega,1}} = 0, \frac{\partial\breve{v}_\omega}{\partial\vec{v}_\omega}|\gamma_{\omega,0} \cup \gamma_{\omega,2} = 0\right\},$$

причем эти пространства рассматриваются на ограниченных областях Ω_ω, которые имеют следующие границы, являющиеся замыканиями объединений открытых и непересекающихся частей

$$\partial\Omega_\omega = s_\omega, s_\omega = \overline{\gamma_{\omega,0} \cup \gamma_{\omega,1} \cup \gamma_{\omega,2} \cup \gamma_{\omega,3}},$$
$$\gamma_{\omega,i} \cap \gamma_{\omega,j} = \emptyset, \text{если } i \neq j, i, j = 0,1,2,3,$$

внешние нормали $\vec{v}_\omega$ к $\partial\Omega_\omega$, заданные и выбираемые коэффициенты $a_\omega\rho_\omega \geq 0$, коэффициенты Пуассона $\sigma_\omega \in [0;1)$. Полагается, что также выполняются неравенства, обеспечивающие для каждой из приведенных задач существование и единственность ее решения

$$\exists c_1, c_2 \in (0; +\infty): c_1\|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \leq \Lambda(\breve{v}_\omega, \breve{v}_\omega) \leq c_2\|\breve{v}_\omega\|^2_{W_2^2(\Omega_\omega)} \forall\breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega.$$

Решаемая задача и фиктивная задача формулируются совместно как продолженная задача

$$\breve{u} \in \breve{V}: \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{II}(\breve{u}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v}) \forall\breve{v} \in \breve{V}, \quad (4)$$

пространство решений этой задачи в расширенном пространстве функций из пространства Соболева

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{\breve{v} \in W_2^2(\Pi): \breve{v}|_{\Gamma_0\cup\Gamma_1} = 0, \frac{\partial\breve{v}}{\partial\vec{N}}\bigg|_{\Gamma_0\cup\Gamma_2} = 0\right\},$$

где данная выбираемая область Ω_1, Ω_{II} такие $\bar{\Omega}_I \cup \bar{\Omega}_{II} = \bar{\Pi}$, $\Omega_1 \cap \Omega_{II} = \emptyset$. $\partial\Pi$ является замыканием объединения открытых непересекающихся частей

$$\partial\Pi = \Gamma, \Gamma = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3}, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 0,1,2,3,$$

пересечение $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_{II}$ является замыканием пересечения $\gamma_{1,0}$ и $\gamma_{II,3}$

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{II} = \overline{\gamma_{1,0} \cap \gamma_{II,3}}, \gamma_{1,0} \cap \gamma_{II,3} \neq \emptyset,$$

$\vec{N}$ – теперь внешняя нормаль к $\partial\Pi$.

Расширенное пространство содержит в качестве подпространства продолженное пространство решений

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \{\breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1|_{\Pi\setminus\Omega_1} = 0\}.$$

Вводятся операторы проектирования на продолженное пространство из расширенного пространства

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1, \breve{V}_1 = imI_1, I_1 = I_1^2.$$

Расширенное пространство содержит подпространства

$$\breve{V}_2 = \breve{V}_2(\Pi) = \{\breve{v}_2 \in \breve{V} : \breve{v}_2|_{\Pi\setminus\Omega_{II}} = 0\}, \breve{V}_0 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2,$$

$$\breve{V}_3 = \breve{V}_3(\Pi) = \{\breve{v}_3 \in \breve{V} : \Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_0) = 0 \forall \breve{v}_0 \in \breve{V}_0\}.$$

Имеют место разложения

$$\breve{V} = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3 = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_{II}$$

и

$$\breve{V}_I = \breve{V}_1 \oplus \breve{V}_3, \breve{V}_{II} = \breve{V}_2 \oplus \breve{V}_3,$$

а разложение в прямые суммы получается при использовании скалярного произведения билинейной формы

$$\Lambda(\breve{u}, \breve{v}) = \Lambda_1(\breve{u}, \breve{v}) + \Lambda_{II}(\breve{u}, \breve{v}) \forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}.$$

Как и ранее, достаточно обычно предположить, что билинейная форма порождает эквивалентную нормировку пространства функций Соболева в расширенном пространстве

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Pi)} \leq \Lambda(\breve{v}, \breve{v}) \leq c_2\|\breve{v}\|^2_{W_2^2(\Pi)} \forall \breve{v} \in \breve{V}.$$

Как обычно в рамках используемого направления, полагаем, что в расширенном пространстве, являющемся пространством функций Соболева, имеют место положения о продолжении функций в следующем виде:

$$\exists \breve{\beta}_1 \in (0;1], \breve{\beta}_2 \in [\breve{\beta}_1;1] : \breve{\beta}_1\Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \leq \Lambda_{II}(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \leq \breve{\beta}_2\Lambda(\breve{v}_3, \breve{v}_3) \forall \breve{v}_3 \in \breve{V}_3.$$

Указанные выше положения и предположения обеспечивают существование и единственность решения задачи (4). Функцию и ее продолжение удобно обозначать одинаково на соответствующих областях

$$\breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \breve{V}_\omega(\Omega_\omega), \omega \in \{1, II\}.$$

При исследовании продолженной задачи можно применить модифицированный метод фиктивных компонент:

$$\breve{u}^k \in \breve{V} : \Lambda(\breve{u}^k - \breve{u}^{k-1}, \breve{v}) = -\tau_{k-1}(\Lambda_1(\breve{u}^{k-1}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{II}(\breve{u}^{k-1}, \breve{v}) - F_1(I_1\breve{v})) \forall \breve{v} \in \breve{V},$$
$$\tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \tau = \frac{2}{(}\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2), k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, \forall \breve{u}^0 \in \breve{V}_1 \subset \breve{V}. \tag{5}$$

Определим норму в пространстве $\breve{V}$ через скалярное произведение

$$\|\breve{v}\|_{\breve{V}} = \sqrt{\Lambda(\breve{v}, \breve{v})}.$$

Теорема 1. *В итерационном процессе (5) выполняются оценки сходимости для относительных ошибок*

$$\left\|\breve{u}^k - \breve{u}\right\|_{\breve{V}} \leq \breve{\varepsilon}\|\breve{u}^0 - \breve{u}\|_{\breve{V}}, k \in \mathbb{N},$$

где

$$\breve{\varepsilon} = \breve{\delta}_1\breve{q}^{k-1}, \breve{\delta}_1 = \sqrt{\|I_1\|^2_{\breve{V}} - 1}, 0 \leq \breve{q} = \frac{(\breve{\beta}_2 - \breve{\beta}_1)}{(\breve{\beta}_1 + \breve{\beta}_2)} < 1.$$

Продолженную задачу на прямоугольной области рассмотрим на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Для аппроксимации продолженной задачи применим метод конечных элементов, используя в нем кусочно-параболические функции, полагая, что

$$\Pi = (0; b_1) \times (0; b_2), \Gamma_0 = \emptyset, \Gamma_1 = \{b_1\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{b_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{0\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{0\}, \Gamma_3 = \emptyset, b_1, b_2 \in (0; +\infty).$$

В прямоугольной области определяем сетку с выбираемыми узлами

$$(x_i; y_j) = ((i - 1{,}5)h_1; (j - 1{,}5)h_2),$$

$$h_1 = b_1/(m - 1{,}5), h_2 = b_2/(n - 1{,}5), i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n, m - 2, n - 2 \in \mathbb{N}.$$

На множестве выбранных узлов рассматриваем сеточные функции

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R}, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n, m - 2, n - 2 \in \mathbb{N}.$$

По сеточным функциям проводим их восполнения с использованием кусочно-параболических функций, определив следующие базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x; y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y), i = 2,\ldots,m - 1, j = 2,\ldots,n - 1, m - 2, n - 2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [\frac{2}{i}]\Psi(\frac{x}{h_1} - i + 4) + \Psi(\frac{x}{h_1} - i + 3) - [\frac{(i + 1)}{m}]\Psi(\frac{x}{h_1} - i + 1),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [\frac{2}{j}]\Psi(\frac{y}{h_2} - j + 4) + \Psi(\frac{y}{h_2} - j + 3) + [\frac{(j + 1)}{n}]\Psi(\frac{y}{h_2} - j + 1),$$

при

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0{,}5t^2, & t \in [0; 1], \\ -t^2 + 3t - 1{,}5, & t \in [1; 2], \\ 0{,}5t^2 - 3t + 4{,}5, & t \in [2; 3], \\ 0, & t \notin (0; 3), \end{cases}$$

$[\bullet]$ – функция взятия целой части числа, функции $\Phi^{i,j}(x;y)$ нулевые вне Π.

$$\Phi^{i,j}(x; y) = 0, (x; y) \notin \Pi, i = 2,\ldots,m - 1, j = 2,\ldots,n - 1, m - 2, n - 2 \in \mathbb{N}.$$

В расширенном пространстве базисные функции образуют подпространство

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x;y) \right\} \subset \check{V}.$$

Продолженная ранее задача аппроксимируется по методу конечных элементов, и получается задача в матричной записи

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : \hat{B}\bar{u} = \bar{f}, \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \quad (6)$$

Выбирается оператор проектирования на конечномерном подпространстве, который полагает равными нулю коэффициенты у базисных функций, если их носители не содержатся в $\bar{\Omega}_1$. При аппроксимации продолженной задачи задаются продолженные матрица и правая часть следующими формулами:

$$\langle \hat{B}\bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle = F_1(I_1\tilde{v}) \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\langle \bar{f}, \bar{v} \rangle = (\bar{f}, \tilde{v}) h_1 h_2 = \bar{f} \tilde{v} h_1 h_2, \bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)' \in R^N, N = (m-2)(n-2).$$

Последовательно занумеруем коэффициенты, базисные функции. Коэффициенты, базисные функции с носителями, содержащимися в $\bar{\Omega}_1$, занумеруем первыми. Коэффициенты, базисные функции с носителями, содержащимися в $\bar{\Omega}_{II}$, занумеруем вторыми. Остальные коэффициенты, базисные функции занумеруем третьими. При таком упорядочивании коэффициентов векторы, состоящие из коэффициентов у базисных функций, будут иметь следующий блочный вид $\bar{v}=(\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')'$, например,

$$\bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{0}', \bar{0}')', \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{0}', \bar{0}')'.$$

Продолженная матрица приобретает следующую блочную форму:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & 0 & \hat{\Lambda}_{13} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{22} & \hat{\Lambda}_{23} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{03} \end{bmatrix}.$$

Продолженная задача после аппроксимации записывается в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N : \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & 0 & \hat{\Lambda}_{13} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{22} & \hat{\Lambda}_{23} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \text{где} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Исходная задача после аппроксимации записывается в следующей форме:

$$\Lambda_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1.$$

Фиктивная задача после аппроксимации записывается в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{22} & \hat{\Lambda}_{23} \\ \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \text{где} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Задаем матрицы, определяемые из скалярных произведений:

$$\langle \hat{\Lambda}_I \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \langle \hat{\Lambda}_{II} \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы принимают следующую блочную форму:

$$\hat{\Lambda}_I = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & 0 & \hat{\Lambda}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{\Lambda}_{31} & 0 & \hat{\Lambda}_{30} \end{bmatrix}, \hat{\Lambda}_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_{22} & \hat{\Lambda}_{23} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{03} \end{bmatrix}.$$

Вводим векторные подпространства:

$$\bar{V}_1 = \{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0} \},$$

$$\bar{V}_2 = \{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_1 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0} \}.$$

Еще дополнительно определяем векторное подпространство:

$$\bar{V}_3 = \{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \hat{\Lambda}_{11}\bar{v}_1 + \hat{\Lambda}_{13}\bar{v}_3 = \bar{0}, \hat{\Lambda}_{22}\bar{v}_2 + \hat{\Lambda}_{23}\bar{v}_3 = \bar{0} \}.$$

Можно отметить, что

$$\mathbb{R}^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_{II}$$

при

$$\bar{V}_I = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3, \bar{V}_{II} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

Определим расширенную матрицу

$$\hat{C} = \hat{\Lambda}_I + \hat{\mu}\hat{\Lambda}_{II},$$

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & 0 & \hat{C}_{13} \\ 0 & \hat{C}_{22} & \hat{C}_{23} \\ \hat{C}_{31} & \hat{C}_{32} & \hat{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & 0 & \hat{\Lambda}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{\Lambda}_{31} & 0 & \hat{\Lambda}_{30} \end{bmatrix} + \hat{\mu} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_{22} & \hat{\Lambda}_{23} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{03} \end{bmatrix}, \hat{\mu} \in (0; +\infty).$$

Зададим положения, достаточные для сходимости приводимого далее итерационного процесса в развиваемом методе итерационных расширений:

$$\exists \hat{\delta}_1 \in (0; +\infty), \hat{\delta}_2 \in [\hat{\delta}_1; +\infty) : \hat{\delta}_1^2 \langle \hat{C}\bar{v}_3, \hat{C}\bar{v}_3 \rangle \le \langle \hat{\Lambda}_{II}\bar{v}_3, \hat{\Lambda}_{II}\bar{v}_3 \rangle \le \hat{\delta}_2^2 \langle \hat{C}\bar{v}_3, \hat{C}\bar{v}_3 \rangle \forall \bar{v}_3 \in \bar{V}_3; \exists \hat{\alpha} \in (0; +\infty) : \langle \hat{\Lambda}_I \bar{v}_3, \hat{\Lambda}_I \bar{v}_3 \rangle \le \hat{\alpha}^2 \langle \hat{\Lambda}_{II}\bar{v}_3, \hat{\Lambda}_{II}\bar{v}_3 \rangle \forall \bar{v}_3 \in \bar{V}_3.$$

Для нахождения приближенного решения исходной задачи после ее редукции к системе линейных алгебраических уравнений приведем развиваемый метод итерационных расширений. В этом методе используем дополнительные параметры, минимизируем ошибку в более сильной норме, т. е. выбираем итерационный параметр при минимизации невязок:

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : \hat{C}(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\hat{B}\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), k \in \mathbb{N},$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \hat{\alpha} < \hat{\mu}, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \frac{\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}{\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}, k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}, \quad (7)$$

Здесь при вычислении оптимального итерационного параметра необходимо поитерационно вычислять векторы невязок, векторы поправок и так называемые векторы эквивалентных невязок

$$\bar{r}^{k-1} = \hat{B}\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = \hat{C}^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} = \hat{B}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Задаем норму

$$\|\bar{v}\|_{\hat{C}^2} = \sqrt{\langle \hat{C}^2\bar{v}, \bar{v}\rangle} \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 2. *В методе итерационных расширений из (7) при решении задачи в (6)*

$$\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{\hat{C}^2} \le \hat{\varepsilon}\|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{\hat{C}^2}, \hat{\varepsilon} = 2(\hat{\delta}\frac{2}{\hat{\delta}_1})(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\mu})}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Данный результат получается аналогично с результатами в [4; 5].

А теперь продолженную задачу аппроксимируем в соответствии с применяемым выше методом конечных элементов, но по смешанному методу аппроксимации по частям [6], тогда получаем в матричной форме систему линейных алгебраических уравнений, записываемую в соответствующем виде

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: B\bar{u} = \bar{f}, \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \qquad (8)$$

Полагаем, что при аппроксимации области Ω_1 и Ω_{II} аппроксимируются областями $\Omega_{h,1}$, $\Omega_{h,II}$, границы которых проходят/совпадают с линиями сетки.

Здесь также выбираем конкретный оператор проектирования, который во введенном конечномерном подпространстве зануляет коффициенты при базисных функциях с носителями, не содержащимися в замыкании первой области. Нумеруем в первом блоке коэффициенты при базисных функциях с носителями, содержащимися в $\bar{\Omega}_{h,I}$. Нумеруем во втором блоке коэффициенты при базисных функциях с носителями, содержащимися в $\bar{\Omega}_{h,II}$. И нумеруем в последнем, третьем блоке остальные коэффициенты при остальных базисных функциях. При этой нумерации коэффициентов при базисных функциях тремя блоками рассматриваемые векторы из коффициентов перед базисными функциями принимают такую блочную форму:

$$\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')', \bar{u} = (\bar{u}_1{}', \bar{0}', \bar{0}')', \bar{f} = (\bar{f}_1{}', \bar{0}', \bar{0}')'.$$

Продолженная матрица принимает следующую блочную форму:

$$B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 & \Lambda_{13} \\ 0 & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{03} \end{bmatrix}.$$

Продолженная задача после аппроксимации записывается в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N: \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 & \Lambda_{13} \\ 0 & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \text{где} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Исходная задача после аппроксимации записывается в форме:

$$\Lambda_{11}\bar{u}_1 = \bar{f}_1.$$

Фиктивная задача после аппроксимации записывается в форме:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{32} & \Lambda_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \text{где} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Задаем матрицы, определяемые из скалярных произведений:

$$\langle \Lambda_I\bar{u}, \bar{v}\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \langle \Lambda_{II}\bar{u}, \bar{v}\rangle = \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы принимают следующую блочную форму:

$$\Lambda_I = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 & \Lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{31} & 0 & \Lambda_{30} \end{bmatrix}, \Lambda_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{03} \end{bmatrix}.$$

Вводим векторные подпространства:

$$\bar{V}_1 = \{\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N: \bar{v}_2 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0}\},$$

$$\bar{V}_2 = \{\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N: \bar{v}_1 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0}\}.$$

Еще дополнительно определяем векторное подпространство:

$$\bar{V}_3 = \{\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N: \Lambda_{11}\bar{v}_1 + \Lambda_{13}\bar{v}_3 = \bar{0}, \Lambda_{22}\bar{v}_2 + \Lambda_{23}\bar{v}_3 = \bar{0}\}.$$

Можно отметить, что

$$\mathbb{R}^N = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3 = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_{II},$$

при

$$\bar{V}_I = \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_3, \bar{V}_{II} = \bar{V}_2 \oplus \bar{V}_3.$$

Определим расширенную матрицу

$$C = \Lambda_I + \mu\Lambda_{II},$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 & \Lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{31} & 0 & \Lambda_{30} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{03} \end{bmatrix}, \mu \in (0; +\infty).$$

Зададим положения, достаточные для сходимости приводимого далее итерационного процесса в развиваемом методе итерационных расширений:

$$\exists \delta_1 \in (0; +\infty), \delta_2 \in [\delta_1; +\infty): \delta_1^2\langle C\bar{v}_3, C\bar{v}_3\rangle \le \langle \Lambda_{II}\bar{v}_3, \Lambda_{II}\bar{v}_3\rangle$$
$$\le \delta_2^2\langle C\bar{v}_3, C\bar{v}_3\rangle \forall \bar{v}_3 \in \bar{V}_3, \exists \alpha \in (0; +\infty): \langle \Lambda_I\bar{v}_3, \Lambda_I\bar{v}_3\rangle$$
$$\le \alpha^2\langle \Lambda_{II}\bar{v}_3, \Lambda_{II}\bar{v}_3\rangle \forall \bar{v}_3 \in \bar{V}_3.$$

Для нахождения приближенного решения исходной задачи после ее редукции к системе линейных алгебраических уравнений приведем развиваемый метод итерационных расширений. В этом методе используем дополнительные параметры, минимизируем ошибку в более сильной норме, т. е. выбираем итерационный параметр при минимизации невязок.

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), k \in \mathbb{N},$$
$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \alpha < \mu, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \frac{\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}{\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}, k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}. \quad (9)$$

Здесь при вычислении оптимального итерационного параметра необходимо поитерационно вычислять векторы невязок, векторы поправок и так называемые векторы эквивалентных невязок

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Задаем норму

$$\|\bar{v}\|_{C^2} = \sqrt{\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \rangle} \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 3. *В методе итерационных расширений из (9) при решении задачи в (1), (2), (3), (8)*

$$\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{C^2} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{C^2}, \varepsilon = 2(\delta \frac{2}{\delta_1})(\frac{\alpha}{\mu})^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Данный результат получается аналогично с результатами в [4; 5].

Выпишем алгоритм, в котором реализуем развиваемый метод итерационных расширений.

1. Начальное приближение, начальный параметр

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \tau_0 = 1.$$

2. Вектор невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, k \in \mathbb{N}.$$

3. Норма абсолютной ошибки в квадрате

$$e_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle, k \in \mathbb{N}.$$

4. Вектор поправки

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

5. Вектор эквивалентной невязки

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

6. Оптимальный итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \frac{\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}{\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle}, k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

7. Вектор приближения

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

8. Критерий остановки итераций

$$e_{k-1} \leq \delta^2 e_0, k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \delta \in (0;1).$$

Пример 1. Рассматривалось численное решение задачи при условиях, что константы $a_1, \rho_1 = 1$, исходная L-образная область дополнялась до квадратной области

$$\Omega_1 = (0;3{,}5) \times (0;3{,}5) \backslash [1;3{,}5) \times [1;3{,}5), \Omega_{II} = (1;3{,}5) \times (1;3{,}5), \Pi = (0;3{,}5) \times (0;3{,}5),$$

границы областей имели следующие части:

$$\gamma_{1,0} = \{1\} \times (1;3{,}5) \cup (1;3{,}5) \times \{1\},$$
$$\gamma_{1,1} = \{3{,}5\} \times (0;1) \cup (0;1) \times \{3{,}5\}, \gamma_{1,2} = \{0\} \times (0;3{,}5) \cup (0;3{,}5) \times \{0\},$$
$$\gamma_{II,1} = \{3{,}5\} \times (1;3{,}5) \cup (1;3{,}5) \times \{3{,}5\}, \gamma_{II,3} = \{1\} \times (1;3{,}5) \cup (1;3{,}5) \times \{1\},$$
$$\Gamma_1 = \{3{,}5\} \times (0;3{,}5) \cup (0;3{,}5) \times \{3{,}5\}, \Gamma_2 = \{0\} \times (0;3{,}5) \cup (0;3{,}5) \times \{0\},$$

функции решения и правой части задачи:

$$\breve{u}_1 = (x^2-1)^5(y^2-1)^5, (x;y) \in (0;1) \times (0;1), \breve{u}_1 = 0, (x;y) \in \Omega_1 \backslash (0;1) \times (0;1),$$
$$\breve{f}_1 = (240(x^2-1)^3(y^2-1)^5 + 2880x^2(x^2-1)^2(y^2-1)^5 + 1920x^4(x^2-1)(y^2-1)^5 +$$
$$+200(x^2-1)^4(y^2-1)^4 + 1600(x^2-1)^4y^2(y^2-1)^3 +$$
$$+1600x^2(x^2-1)^3(y^2-1)^4 + 12800x^2(x^2-1)^3y^2(y^2-1)^3 + +240(y^2-1)^3(x^2$$
$$-1)^5 + 2880y^2(y^2-1)^2(x^2-1)^5 + 1920y^4(y^2-1)(x^2-1)^5 +$$
$$+10(x^2-1)^4(y^2-1)^5 + 80x^2(x^2-1)^3(y^2-1)^5 + 10(y^2-1)^4(x^2-1)^5$$
$$+ 80y^2(y^2-1)^3(x^2-1)^5 + +(x^2-1)^5(y^2-1)^5),$$
$$(x;y) \in (0;1) \times (0;1), \breve{f}_1 = 0, (x;y) \in \Omega_1 \backslash 0;1) \times (0;1).$$

Использовалась сетка с узлами

$$(x_i; y_j) = ((i-1{,}5)h; (j-1{,}5)h), h = 3{,}5/(n-1{,}5),$$
$$i = 1,2\ldots,n, j = 1,2\ldots,n.$$

В вычислительных экспериментах

$$n = 40,75,110,145,180,$$
$$N = 1444,5329,11664,20449,31684.$$

Вектор начального приближения был нулевым. Если n=180, то развиваемый метод итерационных расширений при заданной оценке для ошибки δ=0,001 останавливался на пятой итерации.

При этом в норме максимума модуля выполнялась оценка.

$$\frac{\max\limits_{2 \leq i,j \leq n-1} |u_{i,j}^5 - \breve{u}_{i,j}|}{\max\limits_{2 \leq i,j \leq n-1} |\breve{u}_{i,j}|} \leq 0{,}03, \breve{u}_{i,j} = \breve{u}(x_i; y_j).$$

Таблица числа итераций в зависимости от числа неизвестных решаемых систем следующая.

Таблица 1. Зависимость количества итераций от количества неизвестных

N	1444	5329	11664	20449	31684
k	9	8	7	6	6

График точного решения для продолженной задачи:

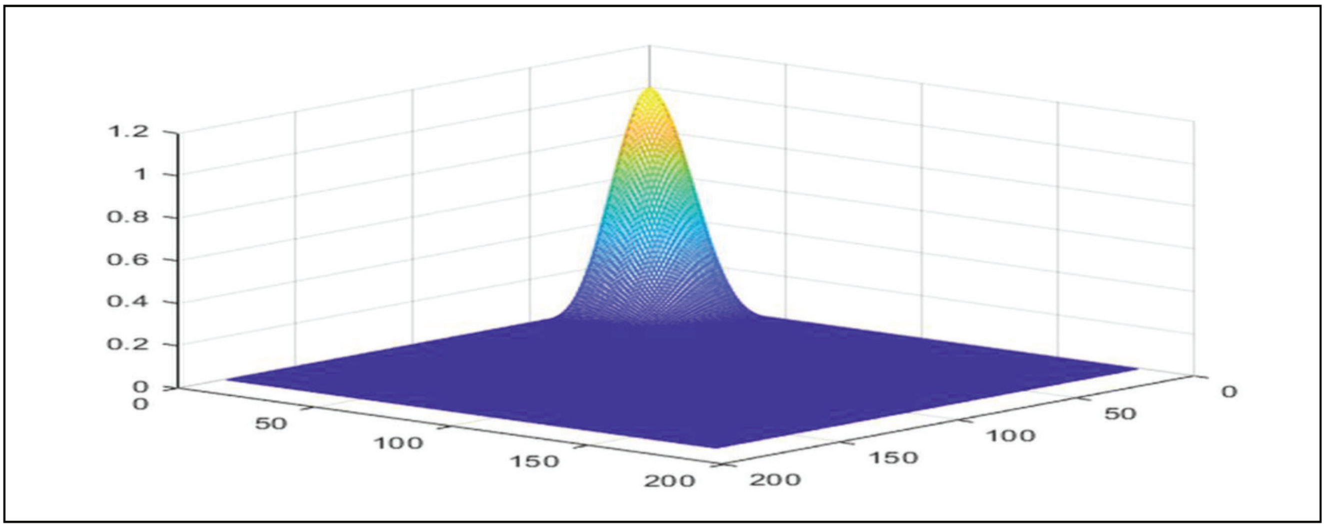

Рисунок 1. График точного решения для продолженной задачи

Затем при вычислительных экспериментах получался график приближенного решения на самой мелкой из рассматриваемых сеток, который визуально не отличался от графика точного решения, поэтому, чтобы практически не дублировать предыдущий рисунок, на следующем рисунке оси координат Ох, Оу повернуты в обратную сторону:

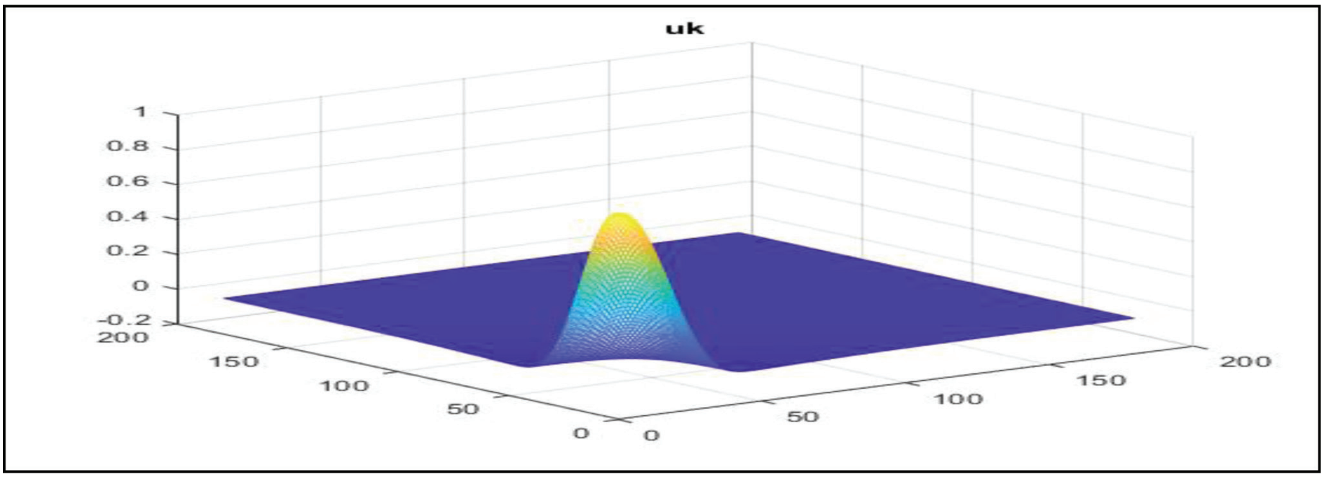

Рисунок 2. График приближенного решения для продолженной задачи

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Разработан асимптотически оптимальный метод при решении эллиптической краевой задачи с условием Дирихле для моделирования изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке в области сложной геометрической формы. Этот метод имеет простую реализацию по сравнению с методом фиктивного пространства [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астраханцев, Г. П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными граничными условиями / Г. П. Астраханцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18, № 1. – С. 118–125.
2. Дьяконов, Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е. Г. Дьяконов. – Москва : Наука, 1989. – 272 с.
3. Мацокин, А. М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А. М. Мацокин, С. В. Непомнящих // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.
4. Ushakov, A. L. Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of iterative Extensions /

A. L. Ushakov, E. A. Meltsaykin // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2022. – V. 15, № 3. – P. 51–66.

5. Ushakov, A. L. A Analysis of Shielded Harmonic and Biharmonic Systems by the Iterative Extension Method / A. L. Ushakov, S. V. Aliukov, E. A. Meltsaykin, M. P. Eremchuk // Mathematics. – 2023. – V. 12, № 918. – 15 p.
6. Обэн, Ж. П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж. П. Обэн. – Москва : Мир, 1977. – 383 с.