



МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБА ПЛАСТИНЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ЖЁСТКОГО КРАЕВОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Мельцайкин Евгений Андреевич

сотрудник кафедры математического
и компьютерного моделирования
Института естественных и точных наук,
Южно-Уральский государственный университет,
Челябинск, Россия
E-mail: meltsaikinea@susu.ru

Предмет исследования: математическая модель прогиба пластины при поперечной нагрузке на упругом основании при наличии жесткого краевого закрепления.

Цель исследования: разработать алгоритм решения задачи в геометрически сложной области с краевым условием Дирихле для уравнения Софи Жермен экранированного типа, который имеет оптимальную асимптотику по вычислительным затратам.

Методы исследования: в данной работе используется метод итерационных расширений в сочетании с методом минимальных невязок для вычисления прогиба пластины при поперечной нагрузке на упругом основании при наличии жесткого краевого закрепления.

Объект исследования: математическая модель – задача в геометрически сложной области с краевым условием Дирихле для уравнения Софи Жермен экранированного типа.

Основные результаты исследования: получен асимптотически оптимальный по вычислительным затратам алгоритм, основанный на методе итерационных расширений в сочетании с методом минимальных невязок для численного моделирования прогиба пластины с надлежащей точностью. Рассмотренная краевая задача фиктивно продолжена через границу с условием Дирихле, а затем использована аппроксимация продолженной задачи методом конечных элементов и методом аппроксимации по частям. Численное решение продолженной задачи итерационно приближено численными решениями расширенных задач, возникающих в развиваемом методе итерационных расширений. Применяемый метод итерационных расширений асимптотически оптимален по количеству операций, т. е. имеет неулучшаемую асимптотику по количеству операций, что экспериментально подтверждается при вычислительных экспериментах.

Ключевые слова: экранированное уравнение Софи Жермен, метод итерационных расширений.

MODELING OF PLATE DEFLECTION UNDER TRANSVERSE LOAD ON AN ELASTIC BASE IN THE PRESENCE OF RIGID EDGE FIXATION

Evgeny A. Meltsaykin

Employee of the Department of Mathematical
and Computer Modeling
Institute of Natural and Exact Sciences,
South Ural State University,
Chelyabinsk, Russia
E-mail: meltsaikinea@susu.ru

Subject of research: mathematical model of plate deflection under transverse load on an elastic foundation with rigid edge fixing.

Purpose of research: to develop an algorithm for solving the problem in a geometrically complex domain with a Dirichlet boundary condition for the Sophie Germain's equation of a shielded type, which has optimal asymptotics in terms of computational costs.

Research methods: this paper uses the iterative expansion method in combination with the minimum residual method to calculate the plate deflection under transverse load on an elastic foundation with rigid edge fixing.

Objects of research: mathematical model – problems in a geometrically complex domain with a Dirichlet boundary condition for the Sophie Germain's equation of a shielded type.

Research findings: an asymptotically optimal algorithm in terms of computational costs was obtained, based on the iterative expansion method in combination with the minimum residual method for numerical modeling of plate deflection with appropriate accuracy. The boundary value problem under consideration is fictitiously continued through the boundary with the Dirichlet condition, and then the approximation of the continued problem by the finite element method and the approximation by parts method is used. The numerical solution of the continued problem is iteratively approximated by numerical solutions of the extended problems arising in the developed method of iterative extensions. The applied method of iterative extensions is asymptotically optimal in the number of operations, i. e., it has unimprovable asymptotics in the number of operations, which is experimentally confirmed in computational experiments.

Keywords: screened Sophie Germain's equation, iterative extension method.

ВВЕДЕНИЕ

Впервые численное решение методом фиктивных областей с неулучшаемой асимптотикой по вычислительным затратам было разработано в работе [1] при решении задачи Неймана для эллиптического уравнения второго порядка. Естественным является стремление свести решение задачи и с условием Дирихле для экранированного уравнения Софи Жермен к численному решению краевой задачи для экранированного уравнения Пуассона в прямоугольной области. Методы решения эллиптических краевых задач

различных порядков в областях со сложной геометрией при обязательном наличии краевого условия Дирихле хотя бы на некоторых частях границ областей обычно логарифмически оптимальны, хотя теоретически возможна оптимальная асимптотика [2–5]. И это если применять маршевый метод для численного решения задач, возникающих при аппроксимации краевых задач для экранированного уравнения Пуассона в прямоугольной области [6]. В области со сложной геометрией при решении задачи Дирихле для эллиптического уравнения только второго



порядка был предложен метод фиктивного пространства с асимптотически оптимальной асимптотикой [7]. Можно предположить, что предложенный метод в практическом и теоретическом плане был весьма непростым, т. е. его практическая реализация технически достаточно трудна. Вероятно, поэтому этот метод не применялся и не получил развития, например, при решении задачи Дирихле для уравнения Софи Жермен в работах [8–14]. Эта работа посвящена развитию метода итерационных расширений при решении задачи в геометрически сложной области с краевым условием Дирихле для уравнения Софи Жермен экранированного типа с оптимальной асимптотикой по количеству операций [15–16].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

1. Постановка задачи. Рассматривается смешанная краевая задача (обязательно с условием Дирихле) для уравнения Софи Жермен с экранированием. Эта задача описывает прогиб пластины при поперечной нагрузке, расположенной на упругом основании, с краевыми условиями симметрии, шарнирного закрепления и свободного края, но с обязательным защемлением хотя бы на части границы.

$$u: \Delta^2 \tilde{u} + a\tilde{u} = \tilde{f} | \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\delta_0} = 0, \tilde{u} = l_1 \tilde{u} \Big|_{\delta_1} = 0, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \vec{n}} = l_2 \tilde{u} \Big|_{\delta_2} = 0, l_1 \tilde{u} = l_2 \tilde{u} \Big|_{\delta_3} = 0,$$

если

$$\partial\Omega = \bar{s}, s = \delta_0 \cup \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3, \delta_i \cap \delta_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 0, 1, 2, 3,$$

$$l_1 \tilde{u} = \Delta \tilde{u} + (1 - \sigma) n_1 n_2 \tilde{u}_{xy} - n_2^2 \tilde{u}_{xx} - n_1^2 \tilde{u}_{yy},$$

$$l_2 \tilde{u} = \frac{\partial \Delta \tilde{u}}{\partial \vec{n}} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial \vec{s}} (n_1 n_2 (\tilde{u}_{yy} - \tilde{u}_{xx}) + (n_1^2 - n_2^2) \tilde{u}_{xy}),$$

$$n_1 = -\cos(\vec{n}, x), n_2 = -\cos(\vec{n}, y), \sigma \in (0; 1).$$

В теоретической физике правая часть в уравнении $\tilde{f} = \tilde{P}/\tilde{D}$ а коэффициент $a = \tilde{K}/\tilde{D}$ если давление $\tilde{P}$, жёсткость $\tilde{D} = \tilde{E}\tilde{h}^3/(12(1-\sigma^2))$, жёсткость основания $\tilde{K} \in [0; +\infty)$, толщина пластины $\tilde{h}$, модуль Юнга $\tilde{E}$, коэффициент Пуассона σ ограниченная область Ω граница $\partial\Omega$, внешняя нормаль $\vec{n}$.

Приведенная выше задача записывается в виде задачи определения линейного функционала скалярным произведением

$$\tilde{u} \in \tilde{H} : [\tilde{u}, \tilde{v}] = F(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{H}, F \in \tilde{H}', \quad (1)$$

на пространстве функций Соболева

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\Omega) = \left\{ \tilde{v} \in W_2^2(\Omega) : \tilde{v} \Big|_{\delta_0 \cup \delta_1} = 0, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\delta_0 \cup \delta_2} = 0 \right\},$$

считается, что скалярное произведение определяется билинейной формой

$$[\tilde{u}, \tilde{v}] = \Lambda(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} (\sigma \Delta \tilde{u} \Delta \tilde{v} + (1 - \sigma)(\tilde{u}_{xx} \tilde{v}_{xx} + 2\tilde{u}_{xy} \tilde{v}_{xy} + \tilde{u}_{yy} \tilde{v}_{yy})) + a \tilde{u} \tilde{v} d\Omega,$$

если задана правая часть уравнения как функции $\tilde{f}$, то полагаем, что линейный функционал будет таковым

$$F(\tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} \tilde{f} \tilde{v} d\Omega.$$

Предполагается, что билинейная форма порождает нормировку расширенного пространства, эквивалентную нормировке в рассматриваемом пространстве Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\tilde{v}\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq \Lambda(\tilde{v}, \tilde{v}) \leq c_2 \|\tilde{v}\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{H}.$$

Это обеспечивает существование и единственность решения (1), см. [17].

2. Рассматриваем при навешиваемом индексе $\omega = 1$ решаемую краевую задачу для уравнения Софи Жермен с экранированием вариационного вида, а при навешиваемом индексе $\omega = \Pi$ вводим фиктивную задачу для уравнения Софи Жермен с экранированием вариационного вида

$$\tilde{u}_{\omega} \in \tilde{H}_{\omega} : \Lambda_{\omega}(\tilde{u}_{\omega}, \tilde{v}_{\omega}) = F_{\omega}(\tilde{v}_{\omega}) \quad \forall \tilde{v}_{\omega} \in \tilde{H}_{\omega}, F_{\omega} \in \tilde{H}_{\omega}', \omega \in \{1, \Pi\}, \Omega_{\omega} \subset \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

если правые части у приведенных выше задач заданы функцией $\tilde{f}_1 \in L_2(\Omega_1)$, то

$$F_{\omega}(\tilde{v}_{\omega}) = \int_{\Omega_{\omega}} \tilde{f}_{\omega} \tilde{v}_{\omega} d\Omega_{\omega} \quad \forall \tilde{v}_{\omega} \in \tilde{H}_{\omega}, \tilde{f}_{\Pi} = 0,$$

а пространства решений есть функции из пространств Соболева

$$\tilde{H}_{\omega} = \tilde{H}_{\omega}(\Omega_{\omega}) = \left\{ \tilde{v}_{\omega} \in W_2^2(\Omega_{\omega}) : \tilde{v}_{\omega} \Big|_{\delta_{\omega,0} \cup \delta_{\omega,1}} = 0, \frac{\partial \tilde{v}_{\omega}}{\partial \vec{n}_{\omega}} \Big|_{\delta_{\omega,0} \cup \delta_{\omega,2}} = 0 \right\},$$

если эти пространства рассматриваются на ограниченных областях Ω_{ω} , которые имеют следующие границы

$$\partial\Omega_{\omega} = \bar{s}_{\omega}, s_{\omega} = \delta_{\omega,0} \cup \delta_{\omega,1} \cup \delta_{\omega,2} \cup \delta_{\omega,3},$$

$$\delta_{\omega,i} \cap \delta_{\omega,j} = \emptyset, \text{ если } i \neq j, i, j = 0, 1, 2, 3,$$

где внешние нормали $\vec{n}_{\omega}$ к границам $\partial\Omega_{\omega}$, а скалярные произведения определяются билинейной формой

$$\Lambda_{\omega}(\tilde{u}_{\omega}, \tilde{v}_{\omega}) = \int_{\Omega_{\omega}} (\sigma_{\omega} \Delta \tilde{u}_{\omega} \Delta \tilde{v}_{\omega} + (1 - \sigma_{\omega})(\tilde{u}_{\omega,xx} \tilde{v}_{\omega,xx} + 2\tilde{u}_{\omega,xy} \tilde{v}_{\omega,xy} + \tilde{u}_{\omega,yy} \tilde{v}_{\omega,yy})) + a_{\omega} \tilde{u}_{\omega} \tilde{v}_{\omega} d\Omega_{\omega},$$

заданные выбираемые коэффициенты $a_\omega \in [0; +\infty)$ коэффициенты Пуассона $\sigma_\omega \in (0; 1)$ Считаем, что $\omega = 1$, $a_1, a_{II} \geq 0$, $\Gamma_{1,0} \neq \emptyset$.

Предполагается, что билинейная форма порождает нормировку расширенного пространства, эквивалентную нормировке в рассматриваемом пространстве Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0: c_1 \|\tilde{v}_\omega\|_{W_2^2(\Omega_\omega)}^2 \leq \Lambda_\omega(\tilde{v}_\omega, \tilde{v}_\omega) \leq c_2 \|\tilde{v}_\omega\|_{W_2^2(\Omega_\omega)}^2 \quad \forall \tilde{v}_\omega \in \tilde{H}_\omega.$$

Это обеспечивает существование и единственность решения (2), см. [17].

Сформулируем продолженную задачу

$$\tilde{u} \in \tilde{V}: \Lambda_1(\tilde{u}, I_1 \tilde{v}) + \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) = F_1(I_1 \tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

с решениями в расширенном пространстве, в пространстве Соболева

$$\tilde{V} = \tilde{V}(\Pi) = \left\{ \tilde{v} \in W_2^2(\Pi): \tilde{v}|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = 0 \right\}.$$

Здесь данная область Ω_1 , выбираемая область Ω_{II} таковы $\Omega_1 \cup \Omega_{II} = \Pi$, $\Omega_1 \cap \Omega_{II} = \emptyset$, граница Π есть замыкание объединения открытых и непересекающихся частей

$$\partial \Pi = \bar{s}, s = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 0, 1, 2, 3,$$

Предполагается, что пересечение границ первой области и второй области есть замыкание непустого пересечения таких частей границ первой и второй областей

$$\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_{II} = \bar{S}, S = \Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{II,3} \neq \emptyset,$$

а к $\partial \Pi$ внешняя нормаль $\vec{n}$.

На самом деле пространство решений продолженной задачи будет подпространством расширенного пространства решений

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_1(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_1 \in \tilde{V}: \tilde{v}_1|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

В продолженной задаче используются всевозможные произвольные пробные операторы проектирования расширенного пространства на продолженное подпространство

$$I_1: \tilde{V} \mapsto \tilde{V}_1, \tilde{V}_1 = \text{im } I_1, I_1 = I_1^2.$$

Подпространства расширенного пространства

$$\tilde{V}_3 = \tilde{V}_3(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_3 \in \tilde{V}: \tilde{v}_3|_{\Pi \setminus \Omega_{II}} = 0 \right\}, \tilde{V}_0 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_3,$$

$$\tilde{V}_2 = \tilde{V}_2(\Pi) = \left\{ \tilde{v}_2 \in \tilde{V}: \Lambda(\tilde{v}_2, \tilde{v}_0) = 0 \quad \forall \tilde{v}_0 \in \tilde{V}_0 \right\},$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_{II}, \tilde{V}_I = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2, \tilde{V}_{II} = \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3.$$

Оператор проектирования теоретически может быть и оператором ортогонального проектирования, когда

$$I_1(v) = I_1(v_1 + v_2 + v_3) = v_1.$$

Прямые суммы рассматриваются в скалярном произведении, определяемом билинейной формой

$$\Lambda(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}) + \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Предполагается, что билинейная форма порождает нормировку расширенного пространства, эквивалентную нормировке в рассматриваемом пространстве Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0: c_1 \|\tilde{v}\|_{W_2^2(\Pi)}^2 \leq \Lambda(\tilde{v}, \tilde{v}) \leq c_2 \|\tilde{v}\|_{W_2^2(\Pi)}^2 \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Используется предположение о продолжении функции

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0; 1], \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1; 1]: \tilde{\beta}_1 \Lambda(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq \Lambda_{II}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq \tilde{\beta}_2 \Lambda(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

Тогда решение продолженной задачи существует и единственно. Оно является решением исходной задачи в первой области и нулевым на остальной части прямоугольной области. Решение исходной задачи и решение, продолженное нулем, решение продолженной задачи можно обозначать одинаково: как функцию, так и продолжение этой функции

$$\tilde{H}_\omega(\Omega_\omega) = \tilde{V}_\omega(\Omega_\omega), \omega \in \{1, II\}.$$

При исследовании продолженной задачи можно применить модифицированный метод фиктивных компонент. Это такой итерационный процесс:

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V}: \Lambda(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) = -\tau_{k-1} (\Lambda_1(\tilde{u}^{k-1}, I_1 \tilde{v}) + \Lambda_{II}(\tilde{u}^{k-1}, \tilde{v}) - F_1(I_1 \tilde{v})) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \tau = 2/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}. \quad (3)$$

Определим норму в пространстве $\tilde{V}$ через скалярное произведение

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{V}} = \sqrt{\Lambda(\tilde{v}, \tilde{v})}.$$

Теорема 1. В итерационном процессе (3) выполняются оценки сходимости для относительных ошибок

$$\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\|_{\tilde{V}} \leq \varepsilon \|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\|_{\tilde{V}}, k \in \mathbb{N},$$

где

$$\varepsilon = \delta_1 q^{k-1}, \delta_1 = \sqrt{\|I_1\|_{\tilde{V}}^2 - 1}, 0 \leq q = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) < 1.$$

Данный результат получается аналогично с соответствующими результатами в [11, 14], см. ссылки там.

Далее продолженную задачу рассматриваем на прямоугольной области в конечномерном подпространстве пространства Соболева. При аппроксимации применим метод конечных элементов, используя параболические функции, полагая, что

$$\Pi = (0; b_1) \times (0; b_2), \Gamma_0 = \emptyset, \Gamma_1 = \{b_1\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{b_2\}, \\ \Gamma_2 = \{0\} \times (0; b_2) \cup (0; b_1) \times \{0\}, \Gamma_3 = \emptyset, b_1, b_2 \in (0; +\infty).$$

В прямоугольной области определяем сетку с выбираемыми узлами

$$(x_i, y_j) = ((i-1,5)h_1; (j-1,5)h_2),$$

$$h_1 = b_1/(m-1,5), h_2 = b_2/(n-1,5), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

На множестве выбранных узлов рассматриваем различные сеточные функции

$$v_{i,j} = v(x_i, y_j) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

По сеточным функциям проводим их восполнение с использованием кусочно-параболических функций для определения следующих базисных функций

$$\Phi^{i,j}(x; y) = \Psi^{1,i}(x) \Psi^{2,j}(y), i = 2, \dots, m-1, j = 2, \dots, n-1, m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i] \Psi(x/h_1 - i + 4) + \Psi(x/h_1 - i + 3) - [(i+1)/m] \Psi(x/h_1 - i + 1),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j] \Psi(y/h_2 - j + 4) + \Psi(y/h_2 - j + 3) + [(j+1)/n] \Psi(y/h_2 - j + 1),$$

где

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0,5t^2, & t \in [0;1], \\ -t^2 + 3t - 1,5, & t \in [1;2], \\ 0,5t^2 - 3t + 4,5, & t \in [2;3], \\ 0, & t \notin (0;3). \end{cases}$$

Дополнительно определяем, что за введенной прямоугольной областью базисные функции зануляются

$$\Phi^{i,j}(x; y) = 0, (x; y) \notin \Pi, i = 2, \dots, m-1, j = 2, \dots, n-1, m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Линейные комбинации базисных функций порождают конечномерное аппроксимирующее подпространство расширенного пространства

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x; y) \right\} \subset \tilde{V}.$$

Продолженную задачу аппроксимируем по методу конечных элементов и получаем ее в виде системы уравнений

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: \hat{B}\bar{u} = \bar{f}, \bar{f} \in \mathbb{R}^N.$$

Здесь применялся оператор проектирования во введенном конечномерном подпространстве, который обнулял коэффициенты при базисных функциях, если их носители не содержались в замыкании первой области. Определяются продолженная матрица и продолженная правая часть из соотношений

$$\langle \hat{B}\bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_I(\tilde{u}, \tilde{v}) + \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle = F_I(I\tilde{v}) \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\langle \bar{f}, \bar{v} \rangle = (\bar{f}, \bar{v}) h_1 h_2 = \bar{f} \bar{v} h_1 h_2, \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)' \in \mathbb{R}^N, N = (m-2)(n-2).$$

Нумеруются коэффициенты при базисных функциях: в первом блоке – коэффициенты при базисных функциях с носителями из замыкания первой области, в третьем блоке – коэффициенты при базисных функциях с носителями из замыкания второй области, во втором блоке – все остальные коэффициенты при остальных базисных функциях. При этой нумерации коэффициентов при базисных функциях тремя блоками рассматриваемые векторы из коэффициентов перед базисными функциями принимают следующую блочную форму

$$\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')', \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{0}', \bar{0}')', \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{0}', \bar{0}')'.$$

Продолженная матрица принимает следующую блочную форму

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & \hat{\Lambda}_{12} & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_{02} & \hat{\Lambda}_{23} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{33} \end{bmatrix}.$$

Задаем матрицы, определяемые из скалярных произведений

$$\langle \hat{\Lambda}_I \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_I(\tilde{u}, \tilde{v}), \langle \hat{\Lambda}_{II} \bar{u}, \bar{v} \rangle = \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют блочную форму

$$\hat{\Lambda}_I = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & \hat{\Lambda}_{12} & 0 \\ \hat{\Lambda}_{21} & \hat{\Lambda}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\Lambda}_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_{02} & \hat{\Lambda}_{23} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{33} \end{bmatrix}.$$

Вводим векторные подпространства

$$\bar{V}_1 = \{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N: \bar{v}_2 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0} \}.$$

Еще дополнительно определяем векторные подпространства

$$\bar{V}_2 = \{ \bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N: \hat{\Lambda}_{11} \bar{v}_1 + \hat{\Lambda}_{12} \bar{v}_2 = \bar{0}, \hat{\Lambda}_{32} \bar{v}_2 + \hat{\Lambda}_{33} \bar{v}_3 = \bar{0} \}.$$

Определим расширенную матрицу как сумму первой матрицы и второй матрицы, умноженной на параметр, больший нуля

$$\hat{C} = \hat{\Lambda}_I + \gamma \hat{\Lambda}_{II},$$

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \\ \hat{C}_{21} & \hat{C}_{22} & \hat{C}_{23} \\ 0 & \hat{C}_{32} & \hat{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & \hat{\Lambda}_{12} & 0 \\ \hat{\Lambda}_{21} & \hat{\Lambda}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_{02} & \hat{\Lambda}_{23} \\ 0 & \hat{\Lambda}_{32} & \hat{\Lambda}_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty).$$

Зададим положения, достаточные для сходимости приводимого далее итерационного процесса в развиваемом методе итерационных расширений, т. е. полагаем, что имеют место свойства при продолжении сеточных функций в виде выполнения следующих неравенств

$$\exists \gamma_1 \in (0; +\infty), \gamma_2 \in [\gamma_1; +\infty): \gamma_1^2 \langle \hat{C} \bar{v}_2, \hat{C} \bar{v}_2 \rangle \leq \langle \hat{\Lambda}_{II} \bar{v}_2, \hat{\Lambda}_{II} \bar{v}_2 \rangle \leq \gamma_2^2 \langle \hat{C} \bar{v}_2, \hat{C} \bar{v}_2 \rangle \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2, \\ \exists \hat{\alpha} \in (0; +\infty): \langle \hat{\Lambda}_I \bar{v}_2, \hat{\Lambda}_I \bar{v}_2 \rangle \leq \hat{\alpha}^2 \langle \hat{\Lambda}_{II} \bar{v}_2, \hat{\Lambda}_{II} \bar{v}_2 \rangle \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Приведем развиваемый метод итерационных расширений, использующий метод минимальных невязок для выбора итерационного параметра

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N: \hat{C}(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\hat{B}\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \hat{\gamma} > \hat{\alpha}, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle / \langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

Здесь при вычислении оптимального итерационного параметра поитерационно вычисляются векторы невязок, векторы поправок и так называемые векторы эквивалентных невязок

$$\bar{r}^{k-1} = \hat{B}\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = \hat{C}^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} = \hat{B}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Задаем нормы, применяя расширенные матрицы

$$\|\bar{v}\|_{\hat{C}^2} = \sqrt{\langle \hat{C}^2 \bar{v}, \bar{v} \rangle} \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 2. В развиваемом методе итерационных расширений (4) при решении возникающей задачи выполняются оценки сходимости для относительных ошибок

$$\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{\hat{C}^2} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{\hat{C}^2}, \varepsilon = 2(\hat{\gamma}_2/\hat{\gamma}_1)(\hat{\alpha}/\hat{\gamma})^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Данный результат получается аналогично с результатами в [15], см. ссылки там.

А теперь продолженную задачу аппроксимируем в соответствии с применяемым выше методом конечных элементов, но по смешанному методу аппроксимации по частям [17], тогда получаем в матричной форме

систему линейных алгебраических уравнений, записываемую в соответствующем виде

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: B\bar{u} = \bar{f}, \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \quad (5)$$

Полагаем, что при аппроксимации области Ω_I, Ω_{II} заменяются областями $\Omega_{h,I}, \Omega_{h,II}$ с границами, проходящими по линиям сетки. Здесь также выбираем конкретный оператор проектирования, который во введенном конечномерном подпространстве зануляет коэффициенты при базисных функциях с носителями, не содержащимися в замыкании первой области. Нумеруем в первом блоке коэффициенты при базисных функциях с носителями, содержащимися в замыкании области $\Omega_{h,I}$. Нумеруем последними в третьем блоке коэффициенты при базисных функциях с носителями, содержащимися в замыкании области $\Omega_{h,II}$. Во втором блоке нумеруем остальные коэффициенты при остальных базисных функциях. При этой нумерации коэффициентов при базисных функциях тремя блоками рассматриваемые векторы из коэффициентов перед базисными функциями принимают следующую блочную форму

$$\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')', \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{u}_2', \bar{u}_3')', \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{f}_2', \bar{f}_3')'.$$

Продолженная матрица принимает такую блочную форму

$$B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Задаем матрицы, получаемые теперь по методу аппроксимации по частям Λ_I, Λ_{II} . Эти матрицы имеют блочную форму

$$\Lambda_I = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Сумму введенных матриц можно представить в виде, например, после перенумерации строк

$$\Lambda = \Lambda_I + \Lambda_{II} = A^2 + aE,$$

где

$$\langle A\bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} ((u_{i+1,j} - u_{i,j})(v_{i+1,j} - v_{i,j})h_1^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})(v_{i,j+1} - v_{i,j})h_2^2)h_1h_2,$$

$$u_{i,n} = v_{i,n} = 0, i = 2, \dots, m-1, u_{m,j} = v_{m,j} = 0, j = 2, \dots, n-1.$$

Здесь E – единичная матрица размерности $N \times N$. В узлах сетки (x_i, y_i) , в которых

носители базисных функций содержатся в замыкании области $\Omega_{h,1}$ $a = a_I$. А в остальных узлах сетки можем полагать, что $a = a_{II}$.

Вводим аналогично векторные подпространства

$$\bar{V}_1 = \{\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0}, \bar{v}_3 = \bar{0}\}.$$

Еще дополнительно теперь определяем векторные подпространства так

$$\bar{V}_2 = \{\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')' \in \mathbb{R}^N : \Lambda_{11}\bar{v}_1 + \Lambda_{12}\bar{v}_2 = \bar{0}, \Lambda_{32}\bar{v}_2 + \Lambda_{33}\bar{v}_3 = \bar{0}\}.$$

Зададим расширенную матрицу как сумму первой матрицы и второй матрицы, умноженной на параметр, который больше нуля

$$C = \Lambda_I + \gamma \Lambda_{II},$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0; +\infty).$$

Задаем положения, достаточные для сходимости предлагаемого далее итерационного процесса в развиваемом методе итерационных расширений, т. е. полагаем, что имеют место свойства при продолжении сеточных функций в виде выполнения следующих неравенств

$$\exists \gamma_1 \in (0; +\infty), \gamma_2 \in [\gamma_1; +\infty) : \gamma_1^2 \langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \rangle \leq \langle \Lambda_{II}\bar{v}_2, \Lambda_{II}\bar{v}_2 \rangle \leq \gamma_2^2 \langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \rangle \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2, \\ \exists \alpha \in (0; +\infty) : \langle \Lambda_I\bar{v}_2, \Lambda_I\bar{v}_2 \rangle \leq \alpha^2 \langle \Lambda_{II}\bar{v}_2, \Lambda_{II}\bar{v}_2 \rangle \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Приведем развиваемый метод итерационных расширений, используя для выбора итерационного параметра метод минимальных невязок

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \gamma > \alpha, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle / \langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где для вычисления оптимального итерационного параметра еще поитерационно вычисляем векторы невязок, векторы поправок и так называемые векторы эквивалентных невязок

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Задаем норму, применяя расширенную матрицу

$$\|\bar{v}\|_{C^2} = \sqrt{\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \rangle} \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 3. В развиваемом методе итерационных расширений (6) при решении

возникающей задачи выполняются оценки сходимости для относительных ошибок

$$\|\bar{u}^k - \bar{u}\|_{C^2} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{C^2}, \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Данный результат получается аналогично результатам в [16].

Выпишем алгоритм, в котором реализуем развиваемый метод итерационных расширений численного решения смешанной краевой задачи при обязательном наличии условия Дирихле для уравнения Софи Жермен с экранированием. Для вариационного выбора итерационного параметра в вычислительном процессе в развиваемом методе итерационных расширений используем метод минимальных невязок.

I. Выбираем вектор начальных приближений, также всегда единичный начальный итерационный параметр

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \tau_0 = 1.$$

II. Поитерационно находим вектор невязок

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, k \in \mathbb{N}.$$

III. Поитерационно вычисляем норму для абсолютной ошибки, но только в квадрате

$$e_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \rangle, k \in \mathbb{N}.$$

IV. Поитерационно ищем вектор поправок

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

V. Поитерационно находим вектор эквивалентной невязки

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Поитерационно находим оптимальный итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle / \langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \rangle, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Поитерационно находим вектор приближения

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Поитерационно проверяем выполнение критерия остановки итераций по заданной оценке относительной ошибки

$$e_{k-1} \leq e^2 e_0, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, e \in (0; 1).$$

Приведем исследование рассматриваемой математической модели в пространстве Соболева. Рассмотрим продолженную

математическую модель в операторном виде в пространстве Соболева

$$\tilde{u} \in \tilde{V} : \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{f},$$

если оператор и правую часть продолженной математической модели определить из соотношений

$$(\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{v}) = \Lambda_I(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \quad (\tilde{f}, \tilde{v}) = F_I(I_1\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$(\tilde{f}, \tilde{v}) = \int_{\Pi} \tilde{f} \tilde{v} d\Pi.$$

Для пространства Соболева при этих обозначениях предположения о продолжении функций записываются в виде

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0; 1], \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1; 1] : \tilde{\beta}_1(\tilde{\Lambda}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq (\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq \tilde{\beta}_2(\tilde{\Lambda}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

если рассматриваемые операторы определить так

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_I + \tilde{\Lambda}_{II}, \quad (\tilde{\Lambda}_I\tilde{u}, \tilde{v}) = \Lambda_I(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}, \tilde{v}) = \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Определим расширенный оператор

$$\tilde{C} = \tilde{\Lambda}_I + \gamma\tilde{\Lambda}_{II}, \quad \gamma \in (0; +\infty).$$

Предполагается выполнение положений о продолжении функций в виде

$$\exists \tilde{\gamma}_1 \in (0; +\infty), \tilde{\gamma}_2 \in [\tilde{\gamma}_1; +\infty) : \tilde{\gamma}_1^2(\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2) \leq (\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2, \tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2) \leq \tilde{\gamma}_2^2(\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

$$\exists \tilde{\alpha} \in (0; +\infty) : (\tilde{\Lambda}_I\tilde{v}_2, \tilde{\Lambda}_I\tilde{v}_2) \leq \tilde{\alpha}^2(\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2, \tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

Сформулируем метод итерационных расширений в пространстве Соболева

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V} : \tilde{C}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$\forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1, \gamma > \tilde{\alpha}, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = (\tilde{\gamma}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}) / (\tilde{\eta}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

здесь для вычисления итерационного параметра необходимо вычислить невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\tilde{r}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}, \quad \tilde{w}^{k-1} = \tilde{C}^{-1}\tilde{r}^{k-1}, \quad \tilde{\eta}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{w}^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зададим норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} = \sqrt{(\tilde{C}\tilde{v}, \tilde{C}\tilde{v})} \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Считаем, что при используемой аппроксимации выполняется

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} \approx \|\tilde{v}\|_{C^2} \quad h_1, h_2 \rightarrow 0.$$

Следствие 1. В методе (7) выполняются оценки

$$\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\|_{\tilde{C}^2} \leq \varepsilon \|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\|_{\tilde{C}^2}, \quad \varepsilon = 2(\tilde{\gamma}_2/\tilde{\gamma}_1)(\tilde{\alpha}/\gamma)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{\alpha} \approx \alpha, \quad \tilde{\gamma}_1 \approx \gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_2 \approx \gamma_2, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0,$$

т. е. относительные ошибки сверху оцениваются геометрической прогрессией с бесконечным убыванием.

Замечание 1. При аппроксимации выполняются асимптотические равенства

$$\alpha \approx \tilde{\alpha} = \text{const}, \quad \gamma_1 \approx \tilde{\gamma}_1 = \text{const}, \quad \gamma_2 \approx \tilde{\gamma}_2 = \text{const}, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0.$$

Приведем исследование рассматриваемой математической модели на конечномерном подпространстве из пространства Соболева. Рассмотрим продолженную математическую модель на конечномерном подпространстве из пространства Соболева

$$\tilde{u} \in \tilde{V} : \tilde{B}\tilde{u} = \tilde{f},$$

если оператор и правая часть продолженной математической модели на конечномерном подпространстве задаются так

$$(\tilde{B}\tilde{u}, \tilde{v}) = \Lambda_I(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \quad (\tilde{f}, \tilde{v}) = F_I(I_1\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Предполагается, что для конечномерного подпространства выполняются положения о продолжении функций в виде

$$\exists \tilde{\beta}_1 \in (0; 1], \tilde{\beta}_2 \in [\tilde{\beta}_1; 1] : \tilde{\beta}_1(\tilde{\Lambda}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq (\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \leq \tilde{\beta}_2(\tilde{\Lambda}\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

если рассматриваемые операторы определить так

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_I + \tilde{\Lambda}_{II}, \quad (\tilde{\Lambda}_I\tilde{u}, \tilde{v}) = \Lambda_I(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}, \tilde{v}) = \Lambda_{II}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Определим расширенный оператор теперь так

$$\tilde{C} = \tilde{\Lambda}_I + \gamma\tilde{\Lambda}_{II}, \quad \gamma \in (0; +\infty).$$

Предполагаем выполнение положений о продолжении функций теперь в виде

$$\exists \tilde{\gamma}_1 \in (0; +\infty), \tilde{\gamma}_2 \in [\tilde{\gamma}_1; +\infty) : \tilde{\gamma}_1^2(\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2) \leq (\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2, \tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2) \leq \tilde{\gamma}_2^2(\tilde{C}\tilde{v}_2, \tilde{C}\tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2,$$

$$\exists \tilde{\alpha} \in (0; +\infty) : (\tilde{\Lambda}_I\tilde{v}_2, \tilde{\Lambda}_I\tilde{v}_2) \leq \tilde{\alpha}^2(\tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2, \tilde{\Lambda}_{II}\tilde{v}_2) \quad \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

Приведем теперь метод итерационных расширений на конечномерном подпространстве из пространства Соболева

$$\tilde{u}^k \in \tilde{V} : \tilde{C}(\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(\tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

$$\forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1, \gamma > \tilde{\alpha}, \tau_0 = 1, \tau_{k-1} = (\tilde{\gamma}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}) / (\tilde{\eta}^{k-1}, \tilde{\eta}^{k-1}), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

Здесь для вычисления итерационного параметра необходимо вычислять невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\tilde{r}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{u}^{k-1} - \tilde{f}, \quad \tilde{w}^{k-1} = \tilde{C}^{-1}\tilde{r}^{k-1}, \quad \tilde{\eta}^{k-1} = \tilde{B}\tilde{w}^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зададим норму

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} = \sqrt{(\tilde{C}\tilde{v}, \tilde{C}\tilde{v})} \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Считаем, что при аппроксимации выполняется

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} \approx \|\tilde{v}\|_{\tilde{C}^2} h_1, h_2 \rightarrow 0.$$

Следствие 2. В методе (8) выполняются оценки

$$\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\|_{\tilde{C}^2} \leq \varepsilon \|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\|_{\tilde{C}^2}, \varepsilon = \tilde{\delta}_1(\tilde{\gamma}_2/\tilde{\gamma}_1)(\tilde{\alpha}/\gamma)^{k-1}, k \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{\delta}_1 \approx 2, \tilde{\alpha} \approx \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_1 \approx \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \approx \tilde{\gamma}_2, h_1, h_2 \rightarrow 0,$$

т. е. относительные ошибки сверху оцениваются геометрической прогрессией с бесконечным убыванием.

Замечание 2. При аппроксимации выполняются асимптотические равенства

$$\tilde{\alpha} \approx \tilde{\alpha} = \text{const}, \tilde{\gamma}_1 \approx \tilde{\gamma}_1 = \text{const}, \tilde{\gamma}_2 \approx \tilde{\gamma}_2 = \text{const}, h_1, h_2 \rightarrow 0.$$

Приведем формулировку метода итерационных факторизаций, используемого в методе итерационных расширений. Рассмотрим снова матрицу

$$C = \Lambda_I + \gamma \Lambda_{II}, \gamma \in (0; +\infty),$$

совпадающую с точностью до перестановки строк с матрицей, возникающей в методе (6) в задаче вида

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: C\bar{u} = \bar{g}, \bar{g} \in \mathbb{R}^N. \quad (9)$$

Отметим, что

$$\frac{\gamma}{2}(A + \sqrt{aE})^2 = \frac{\gamma}{2}(A^2 + 2\sqrt{a}A + aE) \leq$$

$$\leq \gamma(A^2 + aE) = \gamma\Lambda = \gamma(\Lambda_I + \Lambda_{II}) = \gamma\Lambda_I + \gamma\Lambda_{II} \leq \Lambda_I + \gamma\Lambda_{II} =$$

$$C = \Lambda_I + \gamma\Lambda_{II} \leq \Lambda_I + \Lambda_{II} = \Lambda = A^2 + aE \leq A^2 + 2\sqrt{a}A + aE =$$

$$= (A + \sqrt{aE})^2, \gamma \in (0; 1],$$

$$\frac{1}{2}(A + \sqrt{aE})^2 = \frac{1}{2}(A^2 + 2\sqrt{a}A + aE) \leq A^2 + aE = \Lambda = \Lambda_I + \Lambda_{II} \leq$$

$$\leq \Lambda_I + \gamma\Lambda_{II} = C = \Lambda_I + \gamma\Lambda_{II} \leq \gamma\Lambda_I + \gamma\Lambda_{II} = \gamma(\Lambda_I + \Lambda_{II}) =$$

$$= \gamma\Lambda = \gamma(A^2 + aE) \leq \gamma(A^2 + 2\sqrt{a}A + aE) = \gamma(A + \sqrt{aE})^2, \gamma \in [1; +\infty),$$

тогда

$$k_1(A + \sqrt{aE})^2 \leq C \leq k_2(A + \sqrt{aE})^2$$

при

$$k_1 = \begin{cases} \gamma/2, & \gamma \in (0, 1), \\ 1/2, & \gamma \in [1, +\infty), \end{cases} \quad k_2 = \begin{cases} 1, & \gamma \in (0, 1), \\ \gamma, & \gamma \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Обозначим $A = A + \sqrt{aE}$. Введём нормы

$$\|\bar{v}\|_{A^2} = \sqrt{\langle A^2 \bar{v}, \bar{v} \rangle}, \quad \|\bar{v}\|_{\Lambda} = \sqrt{\langle C \bar{v}, \bar{v} \rangle}, \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Рассмотрим итерационный процесс, метод итерационных факторизаций:

$$\bar{u}^l \in \mathbb{R}^N: A^2(\bar{u}^l - \bar{u}^{l-1}) = -\tau_{l-1}(C\bar{u}^{l-1} - \bar{g}),$$

$$\tau_{l-1} = \tau = 2/(k_1 + k_2) > 0, l \in \mathbb{N}, \forall \bar{u}^0 \in \mathbb{R}^N. \quad (10)$$

Теорема 4. Для процесса (10) имеются оценки:

$$1. \quad \|\bar{u}^l - \bar{u}\|_C \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_C,$$

$$2. \quad \|\bar{u}^l - \bar{u}\|_{A^2} \leq \varepsilon \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{A^2},$$

где

$$\varepsilon \leq q^l = ((k_2 - k_1)/(k_2 + k_1))^l, l \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Если $\bar{u}^l = \bar{u} + \bar{\psi}^l, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то получаем

$$A^2(\bar{\psi}^l - \bar{\psi}^{l-1}) = -\tau_{l-1}C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^l - \bar{\psi}^{l-1} = -\tau_{l-1}A^{-2}C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^k = (E - \tau_{l-1}A^{-2}C)\bar{\psi}^{l-1}.$$

Пусть $T_l = E - \tau_{l-1}A^{-2}C$, тогда $\bar{\psi}^l = T_l\bar{\psi}^{l-1}$, где $T_l = T_l^T$ и можно доказать первое неравенство.

$$\begin{aligned} \langle C\bar{\psi}^l, \bar{\psi}^l \rangle &= \langle CT_l\bar{\psi}^{l-1}, T_l\bar{\psi}^{l-1} \rangle \leq \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} (\langle CT_l\bar{\psi}, T_l\bar{\psi} \rangle / \langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle) \langle C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle = \\ &= \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\frac{\langle CT_l\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle^2}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right) \langle C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle = \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_{l-1} \frac{\langle CA^{-2}C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle = \end{aligned}$$

полагаем $\bar{v} = A^{-1}C^{1/2}\bar{\psi}$

$$\begin{aligned} &= \sup_{\bar{v} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_{l-1} \frac{\langle C\bar{v}, \bar{v} \rangle}{\langle A^2\bar{v}, \bar{v} \rangle} \right)^2 \langle C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle \leq \\ &\leq \max \left\{ (1 - \tau_{l-1}k_1)^2, (1 - \tau_{l-1}k_2)^2 \right\} \langle C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle, \end{aligned}$$

отсюда

$$\langle C\bar{\psi}^l, \bar{\psi}^l \rangle \leq q^2 \langle C\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle, \|\bar{u}^l - \bar{u}\|_C \leq q \|\bar{u}^{l-1} - \bar{u}\|_C, \|\bar{u}^l - \bar{u}\|_C \leq q^l \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_C.$$

Затем можно доказать второе неравенство.

$$\begin{aligned} \langle A^2\bar{\psi}^l, \bar{\psi}^l \rangle &= \langle A^2T_l\bar{\psi}^{l-1}, T_l\bar{\psi}^{l-1} \rangle \leq \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\frac{\langle A^2T_l\bar{\psi}, T_l\bar{\psi} \rangle}{\langle A^2\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right) \langle A^2\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle = \\ &= \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(\frac{\langle A^2T_l\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle^2}{\langle A^2\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right) \langle A^2\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle = \sup_{\bar{\psi} \in \mathbb{R}^N} \left(1 - \tau_{l-1} \frac{\langle C\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle}{\langle A^2\bar{\psi}, \bar{\psi} \rangle} \right)^2 \langle A^2\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle \leq \\ &\leq \max \left\{ (1 - \tau_{l-1}k_1)^2, (1 - \tau_{l-1}k_2)^2 \right\} \langle A^2\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle, \end{aligned}$$

тогда

$$\langle A^2\bar{\psi}^l, \bar{\psi}^l \rangle \leq q^2 \langle A^2\bar{\psi}^{l-1}, \bar{\psi}^{l-1} \rangle, \|\bar{u}^l - \bar{u}\|_{A^2} \leq q \|\bar{u}^{l-1} - \bar{u}\|_{A^2}, \|\bar{u}^l - \bar{u}\|_{A^2} \leq q^l \|\bar{u}^0 - \bar{u}\|_{A^2}.$$

Для решения задачи из (9)

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: C\bar{u} = \bar{g}, \bar{g} \in \mathbb{R}^N$$

используем итерационный процесс

$$\bar{u}^l \in \mathbb{R}^N: A^2(\bar{u}^l - \bar{u}^{l-1}) = -\tau_{l-1}(C\bar{u}^{l-1} - \bar{g}), \quad (11)$$

$$\tau_{l-1} > 0, l \in \mathbb{N}, \forall \bar{u}^0 \in \mathbb{R}^N.$$

Для выбора итерационного параметра применим метод минимальных поправок. Приведем алгоритм следующих вычислений:

I. Выбираем вектор начального приближения $\forall \bar{u}^0 \in \mathbb{R}^N$.

II. Поитерационно вычисляем невязку

$$\bar{r}^{l-1}: \bar{r}^{l-1} = C\bar{u}^{l-1} - \bar{g}, l \in \mathbb{N}.$$

III. Поитерационно находим поправку

$$\bar{w}^{l-1} \in \mathbb{R}^N: A^2\bar{w}^{l-1} = \bar{r}^{l-1}, l \in \mathbb{N}.$$

IV. Поитерационно вычисляем квадрат нормы ошибки

$$E_{l-1} = \|\bar{\psi}^{l-1}\|_{C'A^{-2}C}^2 = \langle \bar{r}^{l-1}, \bar{w}^{l-1} \rangle, l \in \mathbb{N}.$$

V. Поитерационно проверяем условие остановки итераций

$$E_{l-1} \leq E_0 E^2, E \in (0; 1), l \in \mathbb{N}.$$

VI. Поитерационно вычисляем вектор эквивалентной невязки

$$\bar{\eta}^{l-1}: \bar{\eta}^{l-1} = C\bar{w}^{l-1}, l \in \mathbb{N}.$$

VII. Поитерационно находим вектор эквивалентной поправки

$$\bar{\xi}^{l-1} \in \mathbb{R}^N: A^2\bar{\xi}^{l-1} = \bar{\eta}^{l-1}, l \in \mathbb{N}.$$

VIII. Поитерационно вычисляем итерационный параметр

$$\tau_{l-1} = \frac{\langle \bar{w}^{l-1}, C\bar{w}^{l-1} \rangle}{\langle C\bar{w}^{l-1}, A^{-2}C\bar{w}^{l-1} \rangle} = \frac{\langle \bar{w}^{l-1}, \bar{\eta}^{l-1} \rangle}{\langle \bar{\eta}^{l-1}, \bar{\xi}^{l-1} \rangle}, l \in \mathbb{N}.$$

IX. Поитерационно вычисляем вектор приближения

$$\bar{u}^l = \bar{u}^{l-1} - \tau_{l-1}\bar{w}^{l-1}, l \in \mathbb{N}.$$

Заметим в условии остановки итерационного процесса $E \in (0; 1)$ – задаваемая относительная погрешность.

На каждом шаге итерационного процесса из (11) возникает задача вида:

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: A^2\bar{u} = \bar{g}, \bar{g} \in \mathbb{R}^N$$

для которой возможно расщепление на две однотипные задачи

$$\bar{q} \in \mathbb{R}^N: A\bar{q} = \bar{g}, \bar{g} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: A\bar{u} = \bar{q}, \bar{q} \in \mathbb{R}^N. \quad (12)$$

При решении задач (12) можно применять асимптотически оптимальный маршевый метод. Таким образом, задача (9) решается асимптотически оптимально, и в итоге асимптотически оптимально решается задача (5).

3. Вычислительный эксперимент. Рассматриваем численное решение краевой задачи при следующих данных

$$\Omega_1 = (1; 2) \times (1; 2), \Omega_{II} = (0; b) \times (0; b) \setminus [1; 2] \times [1; 2], \Pi = (0; b) \times (0; b), 3 < b \leq 19/6.$$

Первая область – это открытый единичный квадрат, вторая область – это открытый квадрат с выколотым замкнутым квадратом. Эти области содержат следующие части

$$\delta_{I,0} = \{1, 2\} \times (1; 2) \cup (1; 2) \times \{1, 2\},$$

$$\delta_{II,1} = \{b\} \times (0; b) \cup (0; b) \times \{b\}, \delta_{II,2} = \{0\} \times (0; b) \cup (0; b) \times \{0\},$$

$$\delta_{II,3} = \{1, 2\} \times (1; 2) \cup (1; 2) \times \{1, 2\},$$

$$\Gamma_1 = \{b\} \times (0; b) \cup (0; b) \times \{b\}, \Gamma_2 = \{0\} \times (0; b) \cup (0; b) \times \{0\}.$$

При аппроксимации в квадратной области и опоясывающей полосе определяем сетку с узлами

$$(x_i; y_j) = ((i-1, 5)h; (j-1, 5)h), h = 3/(n-2),$$

$$n = 161, b = 3 + 0,5h, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n.$$

В рассматриваемом примере для пластины на упругом основании коэффициент $a_1 = 1$ и нагрузка $f_1 = 512(3(x-1)^2(x-2)^2 +$

$$+(6x^2 - 18x + 13)(6y^2 - 18y + 13) + 3(y-1)^2(y-2)^2) +$$

$$+64(x-1)^2(x-2)^2(y-1)^2(y-2)^2,$$

решение исходной задачи

$$\bar{u}_1 = 64(x-1)^2(x-2)^2(y-1)^2(y-2)^2.$$

Вычисляем итерационные приближения для численного решения приведенной задачи, когда выбираем вектор начального приближения нулевым. Вычислительный процесс в развиваемом методе итерационных расширений, если предварительно задаем оценку для ошибки $e = 0,001$, останавливает счет при $k = 5$. Дополнительно отмечаем, что на пятой итерации имеет место в норме максимум модуля следующая оценка

$$\max |u_{i,j}^5 - \bar{u}_{i,j}| / \max |\bar{u}_{i,j}| \leq 0,005.$$

Получается таблица числа итераций в вычислительных экспериментах в зависимости от количества неизвестных в возникающих системах линейных алгебраических уравнений $N = (n - 2)^2$

N	1 521	4 761	9 801	16 641	25 281
k	7	6	6	5	5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Разработан асимптотически оптимальный алгоритм при решении краевой задачи с условием Дирихле для экранированного уравнения Софи Жермен в геометрически сложной области. Этот алгоритм имеет простую реализацию, отличается универсальностью при решении различных задач в отличие от алгоритма метода фиктивного пространства в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астраханцев, Г. П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными граничными условиями / Г. П. Астраханцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18, № 1. – С. 118–125.
2. Дьяконов, Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е. Г. Дьяконов. – Москва : Наука, 1989. – 272 с.
3. Капорин, И. Е. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных эллиптических краевых задач в нерегулярных областях / И. Е. Капорин, Е. С. Николаев // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 7. – С. 1211–1225.
4. Капорин, И. Е. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных уравнений эллиптического типа в областях сложной формы / И. Е. Капорин, Е. С. Николаев // ДАН СССР. – 1980. – Т. 251, № 3. – С. 544–548.
5. Мацокин, А. М. Метод фиктивных компонент и модифицированный разностный аналог метода Шварца / А. М. Мацокин // Вычислительные методы линейной алгебры : сборник научных трудов. – Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1980. – С. 66–77.
6. Bank, R. E. Marching algorithms for elliptic boundary value problems / R. E. Bank, D. J. Rose // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1977. – Vol. 14, № 5. – P. 792–829.
7. Мацокин, А. М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А. М. Мацокин, С. В. Непомнящих // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.
8. Сорокин, С. Б. Переобусловливание при численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения / С. Б. Сорокин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 205–213.
9. Сорокин, С. Б. Аналитическое решение обобщённой спектральной задачи в методе пересчёта граничных условий для бигармонического уравнения / С. Б. Сорокин // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 267–274.
10. Сорокин, С. Б. Точные константы энергетической эквивалентности в методе пересчёта граничных условий для бигармонического уравнения / С. Б. Сорокин // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Информатика. – 2013. – Т. 13, № 3. – С. 113–121.
11. A Review of Mathematical Models of Elasticity Theory Based on the Methods of Iterative Factorizations and Fictitious Components / A. L. Ushakov, S. A. Zagrebina, S. V. Aliukov [et al.] // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, № 420. – P. 1. –17.
12. Ushakov, A. L. Research of the boundary value problem for the Sophie Germain Equation in a cyber-physical system / A. L. Ushakov // Studies in Systems, Decision and Control Springer. – 2021. – Vol. 338. – P. 51–63.
13. Ushakov, A. L. Investigation of a Mixed Boundary Value Problem for the Poisson Equation / A. L. Ushakov // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, Russia, 2020. – P. 273–278.
14. Ушаков, А. Л. О моделировании деформаций пластин / А. Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 138–142.
15. Ushakov, A. L. Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of iterative Extensions / A. L. Ushakov, E. A. Meltsaykin // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2022. – Vol. 15, № 3. – P. 51–66.
16. Analysis of Shielded Harmonic and Biharmonic Systems by the Iterative Extension Method / A. L. Ushakov, S. V. Aliukov, E. A. Meltsaykin, M. P. Eremchuk // Mathematics. – 2023. – Vol. 12, № 918. – P. 1–15.
17. Обэн, Ж. П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж. П. Обэн. – Москва : Мир, 1977. – 383 с.