



## МЕТОД ФРАНКА-ВУЛЬФА В МОДЕЛИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

**Семахин Андрей Михайлович**

кандидат технических наук, доцент  
доцент кафедры программного обеспечения  
автоматизированных систем,  
Курганский государственный университет  
Курган, Россия  
E-mail: Semakhinandrew@yandex.ru

Предмет исследования: процесс выбора наилучшего варианта структуры информационной системы при заданных условиях на этапе проектирования.

Цель исследования: повышение эффективности и качества обоснованности принятия решений, снижение временных и финансовых затрат при выборе структуры информационной системы на этапе проектирования.

Методы и объекты исследования: объектом исследования является информационная система. Формулируется задача нелинейного программирования. Представляется математическая модель выбора оптимального варианта информационной системы. Методом экспертных оценок определяются проекты информационной системы с балльными значениями. Выбираются проекты информационной системы с максимальными значениями баллов для определения оптимального варианта. Методом условного градиента Франка-Вульфа определяется оптимальное решение нелинейной математической модели. Сущность градиентных методов заключается в последовательном изменении значения целевой функции при движении от начальной точки области допустимых решений до оптимального значения функции. Алгоритм метода Франка-Вульфа включает этапы: определение начального значения точки области допустимых решений, вычисление градиента, определение оптимального решения задачи линейного программирования, переход в новую точку, проверка условия окончания итерационного процесса. Итерационный процесс определения оптимального решения заканчивается, когда расчетное значение точности вычислений будет меньше заданной величины.

Основные результаты исследования: определены предварительные проекты информационной системы с помощью метода экспертных оценок, найдено оптимальное решение математической модели нелинейного программирования методом Франка-Вульфа. Математическая модель определения оптимального проекта информационной системы позволит повысить эффективность и качество обоснованности принимаемых решений, сократить финансовые затраты и сроки проектирования информационных систем. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по данной теме.

**Ключевые слова:** информационная система, математическая модель, метод экспертных оценок, метод условного градиента, оптимальное решение, алгоритм.

## THE FRANK-WULF METHOD IN MODELING INFORMATION SYSTEMS

**Andrey M. Semakhin**

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Software  
for Automated Systems,  
Kurgan State University  
Kurgan, Russia  
E-mail: Semakhinandrew@yandex.ru

Subject of research: the process of choosing the best option for the structure of an information system under given conditions at the design stage.

Purpose of research: to increase the efficiency and quality of the validity of decision-making, to reduce time and financial costs when choosing the structure of an information system at the design stage.

Methods and objects of research: the object of research is an information system. The problem of nonlinear programming is formulated. A mathematical model of choosing the optimal variant of an information system is presented. By the method of expert assessments, information system projects with point values are determined. Information system projects with maximum values of scores are selected to determine the optimal option. The method of the conditional Frank-Wolf gradient determines the optimal solution of a nonlinear mathematical model. The essence of gradient methods is a sequential change in the value of the objective function when moving from the starting point of the domain of acceptable solutions to the optimal value of the function. The algorithm of the Frank-Wulff method includes the following steps: determining the initial value of the point of the domain of acceptable solutions, calculating the gradient, determining the optimal solution to a linear programming problem, moving to a new point, checking the condition for the end of the iterative process. The iterative process of determining the optimal solution ends when the calculated value of the calculation accuracy is less than the given value.

Main results of research: preliminary projects of the information system were determined using the method of expert assessments, the optimal solution of the mathematical model of nonlinear programming by the Frank-Wolf method was found. A mathematical model for determining the optimal design of an information system will improve the efficiency and quality of the validity of decisions made, reduce financial costs and design time of information systems. The results obtained can be used in further research on this topic.

**Keywords:** information system, mathematical model, expert evaluation method, conditional gradient method, optimal solution, algorithm.

## ВВЕДЕНИЕ

Современный период развития общества характеризуется переходом от индустриального к информационному состоянию. Развитие информационных технологий является приоритетным направлением. Информационные технологии – совокупность технических и программных средств, приемов работы, с помощью которых выполняются операции по обработке информации.

Повышение эффективности проектирования информационных систем является актуальной задачей. Для ее решения применяются математическое моделирование и реализация алгоритмов решения задачи на ПЭВМ. Математические модели нелинейного программирования имеют широкое применение в решении практических задач в проектировании информационных систем. Преимущества нелинейных математических



Таблица 1. Таблица экспертных показателей выбора проекта.

Критерий выбора	Вес	Факторы					
1. Стандарт передачи данных	2	Аналоговый			Цифровой		
		1			5		
2. Диапазон частоты, ГГц	3	С (3-6)		Ku (10-12)		Ka (28-48)	
		3		8		10	
3. Поляризация	2	Линейная			Круговая		
		1			5		
4. Скорость передачи данных, Мбит/с	5	до 0,5	0,5-1	1-10	10-20	20-30	30-50
		1	2	4	6	8	10
5. Ошибка (FEC)	3	до 0,2	0,2-0,4	0,4-0,6	0,6-0,8	0,8-1,0	
		8	6	4	2	1	
6. Уровень сигнала, дБВт	4	до 30	30-35	35-40	40-45	45-50	св. 50
		1	3	6	8	9	10
7. Уровень надежности	3	Низкий		Средний		Высокий	
		2		4		6	
8. Абонентская плата	2	Объемная		Часовая		Месячная	
		1		3		5	
9. Стоимость оборудования, тыс. \$	5	До 0,2	0,2-0,5	0,5-1	1-5	5-10	св. 10
		0	8	6	4	2	1
10. Стоимость установочных и пуско-наладочных работ, \$	4	До 50	50-100	100-200	200-500	500-1000	Св.1000
		10	8	6	4	2	1

моделей – небольшие финансовые и временные затраты на разработку, полный и точный учет зависимостей между факторами и показателями, влияющими на критерий эффективности и ограничения в системе ограничений [1; 2].

Максимизировать чистый приведенный эффект проектов информационных систем, предварительно отобранных в портфель инвестиций методом экспертных оценок. Финансирование проектов информационных систем распределено по периодам времени при выполнении условий ограничений:

1 сумма произведения инвестиционных затрат информационных проектов на доли финансирования в периодах времени не больше выделенных финансовых средств;

2 сумма долей финансирования информационных проектов равна 1.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Математическая модель включает два этапа:

1. Методом экспертных оценок выбираются проекты информационных систем со спутниковым интернетом с наибольшими оценками.

2. Методом нелинейного математического программирования определяется оптимальный вариант из числа проектов информационных систем, выбранных на первом этапе.

Пусть  $i = \overline{1, n}$  – число вариантов проектов информационных систем со спутниковым интернетом;  $q = \overline{1, t}$  – число экспертов, оценивающих варианты проектов информационных систем;  $k = \overline{1, p}$  – число факторов;  $\beta_{qk}$  – вес,



Таблица 2. Затраты на реализацию проектов.

Проект	Затраты, млн. руб.		
	Вычислительная техника, программное обеспечение и т.д.	Спутниковое оборудование	Общие
Триколор	4,4	3,0	7,4
Open Sky	4,4	0,3	4,7

Таблица 3. Исходные данные для определения оптимального проекта.

Период времени f, лет	Инвестиционные затраты, млн. руб		Итого инвестиционных затрат, млн. руб.	Имеющиеся средства финансирования, млн. руб.
	Триколор	Open Sky		
F=0	-5,4	-3,2	-8.6	6,5
F=1	-2,0	-1,5	-3.5	3
NPV	+1.53	+0.74		

присвоенный q экспертом k фактору,  $Z_{qk}^i$  – оценка, данная q экспертом k фактору, тогда усредненная оценка i-го варианта проекта информационной системы рассчитывается по формуле:

$$\overline{Z}_i = \frac{1}{q} \sum_{q=1}^t \sum_{k=1}^p \beta_{qk} * Z_{qk}^i \quad (1)$$

Ранжирование позволяет выявить наиболее подходящие варианты проектов информационных систем [3–5].

На втором этапе выбирается оптимальный проект информационной системы из числа проектов, определенных на первом этапе. Формулируется задача нелинейного программирования.

Математическая модель выбора оптимального проекта информационной системы имеет вид:

$$\overline{Z}_i = \frac{1}{q} \sum_{q=1}^t \sum_{k=1}^p \beta_{qk} * Z_{qk}^i$$

$$\begin{aligned} \max \leftarrow Z &= \sum_{i=1}^n (P_i - k_i * X_i) * X_i = \\ &= (P_1 - k_1 * X_1) * X_1 + \dots + (P_n - k_n * X_n) * X_n \end{aligned}$$

при ограничениях (2)

$$\begin{cases} V_1^0 * X_1 + V_2^0 * X_2 + \dots + V_n^0 * X_n JS^0 \\ V_1^1 * X_1 + V_2^1 * X_2 + \dots + V_n^1 * X_n JS^1 \\ \vdots \\ V_1^m * X_1 + V_2^m * X_2 + \dots + V_n^m * X_n JS^m \\ X_1 + \dots + X_n = 1 \\ X_i \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \end{cases}$$

где  $P_i$  – чистый приведённый эффект проекта; млн руб;  $V_i^j$  – инвестиционные затраты i-го проекта в j-ом периоде времени, млн руб.;  $JS^j$  – имеющиеся средства финансирования в j-ом периоде времени, млн руб.;  $X_i$  – доля финансирования инвестиционного проекта;  $k_i$  – коэффициент изменения чистого приведенного эффекта;  $i = \overline{1, n}$  – номер инвестиционного проекта;  $j = \overline{1, m}$  – номер периода времени, год.

Используя математическую модель, осуществим выбор оптимального проекта информационной системы со спутниковым интернетом.



На первом этапе выберем варианты проектов информационных систем с помощью метода экспертных оценок. В таблице 1 приведены критерии выбора, значения факторов и весовые коэффициенты.

После ранжирования проектов информационных систем со спутниковым интернетом получим проекты «Триколор» (196 баллов), «Open Sky» (175 баллов), «LanSat» (154 баллов), «Skydsl» (150 балла) и «GxSAT» (132 баллов). Выберем в портфель инвестиций первые два проекта с наибольшими баллами «Триколор» (196 баллов), «Open Sky» (175 баллов).

В таблице 2 приведены затраты на реализацию проектов информационных систем со спутниковым интернетом, отобранных на первом этапе математической модели.

В таблице 3 приведены исходные данные для выбора оптимального проекта спутникового Internet из портфеля инвестиций.

Пусть  $X_1$  – доля финансирования проекта информационной системы со спутниковым интернетом «Триколор»,  $k_1 = 0,7$  – коэффициент изменения чистого приведенного эффекта,  $X_2$  – доля финансирования проекта информационной системы со спутниковым интернетом «Open Sky»,  $k_2 = 0,6$  – коэффициент изменения чистого приведенного эффекта. Точность вычислений  $\varepsilon = 0.0001$ .

Используя исходные данные из таблицы 3, математическую модель можно записать в виде целевой функции и ограничений

$$\begin{aligned} \max \leftarrow Z &= (1,53 - 0,7 * X_1) * \\ &X_1 + (0,74 - 0,6 * X_2) * X_2 \\ \text{при ограничениях} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 5,4 * X_1 + 3,2 * X_2 \leq 6,5 \\ 2,0 * X_1 + 1,5 * X_2 \leq 3,0 \\ X_1 + X_2 = 1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи нелинейного программирования определяется методом условного градиента. Сущность градиентных методов заключается в последовательном изменении значения целевой функции при движении от начальной точки  $X^0$  области допустимых решений до  $X^*$  оптимального значения функции [6–12].

Алгоритм метода Франка-Вульфа включает этапы.

Этап 1. Определение начального допустимого значения  $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

Этап 2. Вычисление градиента  $\nabla f(X^0)$  в точке  $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

Этап 3. Определение оптимального решения  $Q' = (q_1', \dots, q_n')$  задачи линейного программирования, целевая функция математической модели которой равна скалярному произведению вектора-градиента  $\nabla f(X')$  и вектора  $X = (x_1, \dots, x_n)$  при ограничениях исходной задачи ( $I$  – номер итерации,  $I = 1, f$ ).

Этап 4. Переход в новую точку  $X^{(I+1)}$ , принадлежащую области допустимых решений. Значения координат новой точки  $X^{(I+1)}$  рассчитываются по формуле

$$X^{(I+1)} = X' + \lambda_I (Q' - X^{(I)}) \quad (4)$$

Этап 5. Определение величины шага  $\lambda_I$  ( $0 \leq \lambda_I \leq 1$ ). Подстановка правой части уравнения 4 в целевую функцию математической модели исходной задачи, определение производной целевой функции по  $\lambda_I$  и приравнение нулю, определение значения  $\lambda_I$ . Расчет значений точки  $X^{(I+1)}$  и целевой функции  $f(X^{(I+1)})$ .

Этап 6. Проверка условия окончания итерационного процесса по математическому выражению

$$|f(X^{(I+1)}) - f(X^I)| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность вычислений [6]. Если условие неравенства 6 не выполняется, то переход к новой точке на этап 2.

Определим оптимальное решение математической модели 3.

Итерация 0. 1 Начальное допустимое значение  $X^0 = (0,4; 0,6)$ . Значение целевой функции

$$f(X^0) = 1,53 * 0,4 - 0,7 * 0,4^2 +$$

$$0,74 * 0,6 - 0,6 * 0,6^2 = 0,728$$

## 2 Определение градиента

$$\nabla f(X^0) = (1,53 - 1,4 * x_1;$$

$$0,74 - 1,2 * x_2) = (0,97; 0,02) \text{ в точке } X^0.$$

3 Определение оптимального решения математической модели задачи линейного программирования, целевая функция которой определяется как скалярное произведение вектора-градиента  $\nabla f(X^0)$  и вектора  $X = (x_1, x_2)$  при ограничениях исходной задачи

$$\max \leftarrow F_0(X^0) = 0,97x_1 + 0,02x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4x_1 + 3,2x_2 \leq 6,5 \\ 2x_1 + 1,5x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи линейного программирования

$$X^{0*} = (1; 0), F_0(X^{0*}) = 0,97.$$

4 Переход в новую точку  $X^1 = (x_1^1, x_2^1)$ .  
Определяем значения искоемых переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

$$x_1^1 = x_1^0 + \lambda_0(x_1^{*0} - x_1^0) =$$

$$0,4 + \lambda_0(1 - 0,4) = 0,4 + 0,6\lambda_0$$

$$x_2^1 = x_2^0 + \lambda_0(x_2^{*0} - x_2^0) =$$

$$0,6 + \lambda_0(0 - 0,6) = 0,6 - 0,6\lambda_0$$

5 Определяем шаг вычислений  $\lambda_0$  ( $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ ). Подставим  $x_1^1$  и  $x_2^1$  в целевую функцию исходной математической модели

$$\max \leftarrow f(0,4 + 0,6\lambda_0; 0,6 - 0,6\lambda_0) =$$

$$0,728 + 0,570\lambda_0 - 0,468\lambda_0^2$$

Находим первую производную функции по  $\lambda_0$  и приравниваем к нулю

$$f'(X^1) = 0,570 - 0,936\lambda_0 = 0.$$

Значение шага вычислений

$$\lambda_0 = \frac{0,570}{0,936} = 0,609.$$

Значение

$$x_1^1 = 0,4 + 0,609(1 - 0,4) = 0,765.$$

$$\text{Значение } x_2^1 = 0,6 - 0,6 * 0,609 = 0,235.$$

6 Определим значение целевой функции в точке  $X^1$ .

$$f(x_1^1; x_2^1) = f(0,765; 0,235) = 0,902$$

7 Проверим условие точности вычислений

$$|f(X^1) - f(X^0)| = |0,902 - 0,728| =$$

$$0,174 > 0,0001.$$

Разность значений функций

$$|f(X^1) - f(X^0)|$$

больше заданной точности вычислений  $\varepsilon = 0,0001$ , следовательно переходим на следующую итерацию.

Итерация 1.

1 Значение

$X^1 = (0,765; 0,235)$  принадлежит области допустимых решений. Значение целевой функции математической модели

$$f(X^1) = f(0,765; 0,235) = 0,902.$$

## 2 Определение градиента

$$\nabla f(X^1) = (0,459; 0,458) \text{ в точке } X^1.$$

3 Определение оптимального решения математической модели задачи линейного

программирования, целевая функция которой определяется как скалярное произведение вектора-градиента  $\nabla f(X^1)$  и вектора  $X = (x_1, x_2)$  при ограничениях исходной задачи

$$\max \leftarrow F_1(X^1) = 0,459x_1 + 0,458x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4x_1 + 3,2x_2 \leq 6,5 \\ 2x_1 + 1,5x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи линейного программирования

$$X^{1*} = (1; 0), F_1(X^{1*}) = 0,459.$$

4 Переход на новую точку  $X^2 = (x_1^2, x_2^2)$ . Определяем значения искомых переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

$$x_1^2 = x_1^1 + \lambda_1(x_1^{1*} - x_1^1) =$$

$$0,765 + \lambda_1(1 - 0,765) = 0,765 + 0,235\lambda_1$$

$$x_2^1 = x_2^1 + \lambda_1(x_2^{1*} - x_2^1) =$$

$$0,235 + \lambda_1(0 - 0,235) = 0,235 - 0,235\lambda_1$$

5 Определяем шаг вычислений  $\lambda_0$  ( $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ ). Подставим  $x_1^2$  и  $x_2^2$  в целевую функцию исходной математической модели

$$\max \leftarrow f(0,765 + 0,235\lambda_1; 0,235 - 0,235\lambda_1) =$$

$$0,9015575 + 0,000235\lambda_1 - 0,0717925\lambda_1^2$$

Находим первую производную функции по  $\lambda_1$  и приравняем к нулю

$$f'(X^2) = 0,000235 - 0,0717925\lambda_1 = 0.$$

Значение шага вычислений

$$\lambda_1 = \frac{0,000235}{0,0717925} = 0,003273.$$

Значение

$$x_1^2 = 0,765 + 0,235 * 0,003273 = 0,766.$$

Значение

$$x_2^2 = 0,235 - 0,235 * 0,003273 = 0,234.$$

6 Определим значение целевой функции в точке  $X^{1*}$ .

$$f(x_1^2; x_2^2) = f(0,766; 0,234) = 0,901557$$

7 Проверим условие точности вычислений

$$|f(X^2) - f(X^1)| = |0,901557 - 0,901555| = 0,000002 < 0,0001.$$

Разность значений функций  $|f(X^2) - f(X^1)|$  меньше заданной точности вычислений  $\varepsilon = 0,0001$ , следовательно конец итерационного процесса.

Оптимальное решение

$$X^* = \{0,766; 0,234\}, f(X^*) = 0,901557.$$

Проект информационной системы с интернетом «Триколор» имеет максимальную долю финансирования, равную 0,766. Проект информационной системы с интернетом «Open Sky» имеет минимальную долю финансирования, равную 0,234. Максимальный чистый приведенный эффект проектов информационной системы

$$f(X^*) = 0,901557 \text{ миллионов рублей.}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОODY

Математическое моделирование явлений, процессов и объектов позволяет получить научно обоснованные результаты, заслуживающие доверия с наименьшими временными и финансовыми затратами.

Результаты проведенных исследований можно эффективно использовать при выборе наилучшего варианта структуры информационной системы организации и позволили сделать следующие выводы.





1. Определены предварительные проекты информационных систем с помощью метода экспертных оценок.

2. Использована нелинейная математическая модель оптимизации информационных систем.

3. Найдено оптимальное решение математической модели нелинейного программирования методом Франка-Вульфа.

4. Математическая модель определения оптимального проекта информационной системы позволит повысить эффективность и обоснованность принимаемых решений, сократить финансовые затраты и сроки проектирования информационных систем.

5. Полученные результаты могут быть использованы для разработки визуального программного приложения на ПЭВМ и в дальнейших исследованиях по данной теме.

## ЛИТЕРАТУРА

- Пятибратов, А. П. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации / А. П. Пятибратов, Л. П. Гудыно, А. А. Звездин. – Москва : Финансы и статистика, 2002. – 512 с. – Текст : непосредственный.
- Бройдо В. Л. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации. – Санкт-Петербург : Питер, 2005. – 703 с. – Текст : непосредственный.
- Семахин, А. М. Метод Гаусса-Жордана в моделировании информационной системы / А. М. Семахин. – Текст : непосредственный // Естественные и технические науки. – 2014. – №5(73) С. 153–163.
- Семахин, А. М. Линейное программирование в моделировании информационных систем: учебное пособие. – Курган : Изд-во КГУ, 2016. – 68 с. – ISBN 978-5-4217-40366-2. – Текст : непосредственный.
- Семахин, А. М. Нелинейное программирование в моделировании информационных систем / А. М. Семахин. – Текст : непосредственный // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2016. – № 1. – С. 49–53.
- Костевич, Л. С. Математическое программирование: информационные технологии оптимизации решений: учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Минск: Новое знание, 2003. – 424 с. – Текст : непосредственный.
- Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – Москва : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с. – Текст : непосредственный.
- Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – Москва : Мир, 1982. – 345 с. – Текст : непосредственный.
- Зангвилл, У. И. Нелинейное программирование. Единый подход / У. И. Зангвилл. – Москва : Советское радио, 1973. – 312 с. – Текст : непосредственный.
- Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – Москва : Мир, 1975. – 534 с. – Текст : непосредственный.
- Кюнце, Г. П. Нелинейное программирование / Г. П. Кюнце, В. Крелле. – Москва : Мир, 1965. – 325 с. – Текст : непосредственный.
- Эльстер, К. Х. Введение в нелинейное программирование / К. Х. Эльстер, Р. Рейнгардт, М. Шойбле, Г. Донат. – Москва : Наука, 1985. – 264 с. – Текст : непосредственный.