

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ  
НА ОСНОВЕ ТРИЖДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ**

**Еремин Антон Владимирович**  
доктор технических наук, доцент  
заведующий кафедры «Промышленная теплоэнергетика»  
Теплоэнергетического факультета,  
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»  
Самара, Россия  
E-mail: a.v.eremin@list.ru

**Зинина Софья Алексеевна**  
аспирант,  
ассистент кафедры «Промышленная теплоэнергетика»  
Теплоэнергетического факультета,  
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»  
Самара, Россия  
E-mail: sofazinina4@gmail.com

**Олатуйи Олувапелуми Джонсон**  
аспирант кафедры «Промышленная теплоэнергетика»  
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»  
Самара, Россия  
E-mail: olatuyi.oluwapelumi@gmail.com

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00047,  
<https://rscf.ru/project/21-79-00047>.

*Предмет исследования: математическая модель теплопроводности в пористой плоской стенке, структура которой основана на трижды периодической минимальной поверхности Шона I-WP (TPMS).*

*Цель исследования: изучение протекания процесса теплопроводности в пористой пластине при заданной пористости. При этом материал, из которого изготовлена пористая пластина, представляет собой пластик PETG.*

*Методы исследования: в данной работе решение осуществлялось методом конечных разностей в ПО Mathcad.*

*Основные результаты исследования: получены распределения температуры по пространственной координате и во времени, а также распределение теплового потока во времени в зависимости от изменения коэффициента пористости пластины.*

*Ключевые слова: метод конечных разностей, пористая пластина, пористость, теплопроводность, трижды периодические минимальные поверхности.*

**INVESTIGATION OF HEAT TRANSFER IN A POROUS MATERIAL  
BASED ON TRIPLY PERIODIC SURFACES OF MINIMAL ENERGY**

**Anton V. Eremin**

*Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,  
Head of the Department "Industrial Heat Power Engineering",  
Faculty of Heat and Power Engineering,  
Samara State Technical University  
Samara, Russia  
E-mail: a.v.eremin@list.ru*

**Sofya A. Zinina**

*Postgraduate Student,  
Assistant of the Department of "Industrial Heat Power Engineering",  
Faculty of Heat and Power Engineering,  
Samara State Technical University  
Samara, Russia  
E-mail: sofazinina4@gmail.com*

**Olatui Oluwapelumi Johnson**

*Postgraduate Student,  
Department of "Industrial Heat Power Engineering",  
Samara State Technical University  
Samara, Russia  
E-mail: olatuyi.oluwapelumi@gmail.com*

The research was supported by the Russian Science Foundation grant No. 21-79-00047,  
<https://rscf.ru/project/21-79-00047>.

*The subject of research: is a mathematical model of thermal conductivity in a porous flat wall, the structure of which is based on the three times periodic minimal Sean surface I-WP(TPMS).*

*The purpose of research: to study the course of the heat conduction process in a porous plate at a given porosity. At the same time, the material from which the porous plate is made is PETG plastic.*

*Methods of research: in this work, the solution was carried out by the finite difference method in the Mathcad software.*

*Results of the research: temperature distributions were obtained along the spatial coordinate and in time, as well as the distribution of heat flow in time depending on the change in the plate porosity coefficient.*

*Key words: finite difference method, porous plate, porosity, thermal conductivity, tri-periodic minimal surfaces.*

---

**Введение**

В настоящее время широкое применение во всех областях промышленности находят пористые композиционные материалы. Так, например, в работе [1] авторами используется класс материалов, представляющих собой металлоорганические каркасы (MOF). Благодаря своей сверхбольшой площади поверхности и регулируемой химической структуре эти пористые материалы находят применение в проведении таких процессов, как катализ и адсорбция. На сегодняшний день MOF не были широко представлены в промышленности из-за трудности изготовления формы. Однако развитие 3D-печати позволяет создать универсальный подход к фор-

мированию структуры MOF с последующим применением их в промышленности, например, в хранении и распределении газа. Особое внимание авторами уделяется 3D-печати MOFs, что позволит использовать данные наработки в области энергетики и защиты окружающей среды.

Под пористым материалом понимают тело, имеющее в своем объеме свободное пространство, представленное в виде пор или каналов. Притом геометрические размеры поры меньше размеров тела. Если рассматривать область применения таких материалов, то они наиболее распространены в качестве теплоизоляционного и строительного материала. Связано это, в первую очередь, со значением коэффициента эффективной теплопроводности, при этом  $\lambda$  сильно зависит от плотности материала и размера пор. Так, авторами работы [2] введено понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности условного сплошного шарового включения, заменяющего пору, а также проведен сравнительный анализ оценок истинного значения эффективного коэффициента в диапазоне изменения пористости.

Среди пористых материалов наибольший интерес представляют трижды периодические минимальные поверхности TPMS. Так, исследованию теплофизических и прочностных свойств таких поверхностей посвящены, например, работы [3–7].

Одним из возможных способов изучения свойств TPMS структур является математическое моделирование. При моделировании теплофизических процессов, протекающих в пористых структурах, возможно применение численных методов [8, 9], а также точных и приближенных аналитических методов. Например, в работах [10, 11] авторами предложено решение задачи теплопроводности аналитическими методами, основанными на введении дополнительных граничных условий и дополнительных граничных функций.

В данной статье приведено решение задачи теплопроводности для пористой пластины, изготовленной из пластика PETG (рис. 1). Решение осуществлялось методом конечных разностей в ПО Mathcad.

### Формирование тпмп I-WP

На рис. 1 представлена пластина, структура которой основана на повторяющихся элементарных ячейках. Элементарные ячейки представляют собой трижды периодические минимальные поверхности I-WP. Толщина данным ячейкам придается с помощью формирования твердотельного слоя, ограниченного исходной минимальной поверхностью. В дальнейшем, последовательно соединяя полученные ячейки, возможно получение материала с заданными характеристиками, такими как объем тела, пористость материала и т. д.

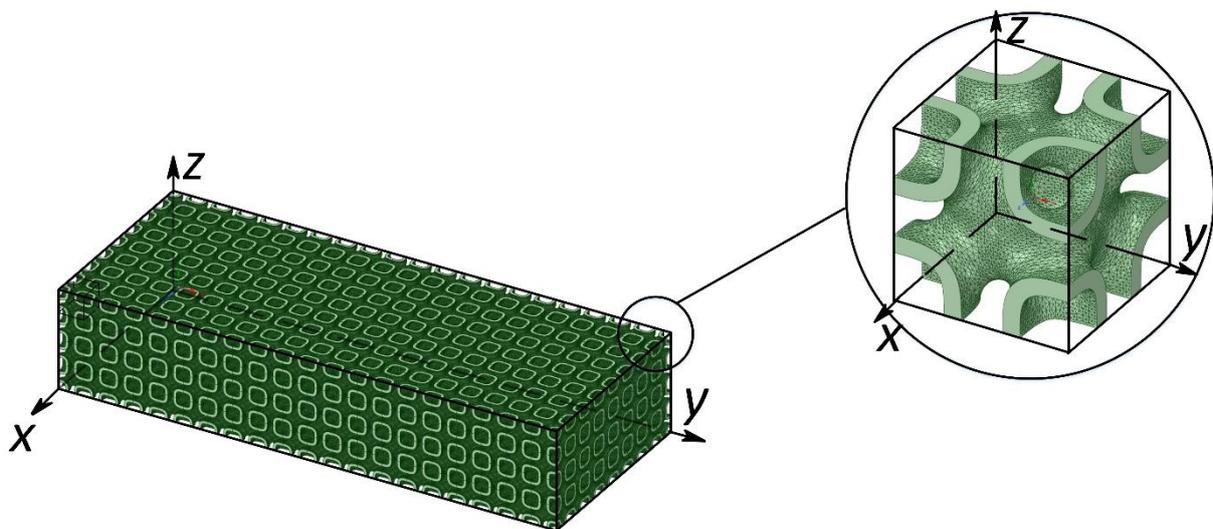


Рисунок 1 – Пористая пластина, имеющая упорядоченную структуру, основанную на TPMS I-WP

### Постановка задачи

Общая запись уравнения теплового баланса имеет вид [12]:

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q}, \quad (1)$$

где  $c$  – теплоемкость;  $\rho$  – плотность;  $T$  – температура;  $t$  – время;  $x$  – пространственная координата.

Согласно закону Фурье тепловой поток примет вид:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (2)$$

При постоянных теплофизических свойствах справедливо:

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T). \quad (3)$$

Принимая во внимание, что  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \Delta T = \nabla^2 T$ , то уравнение (3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \Delta T, \quad (4)$$

где  $a$  – температуропроводность. Коэффициент температуропроводности пористого материала определяется следующим выражением:

$$a = \frac{\lambda(\varphi)}{c\rho(\varphi)} = \frac{0,1759 - 0,1776\varphi}{c\rho_m(1-\varphi)}, \quad (5)$$

где  $\lambda(\varphi) = 0,1759 - 0,1776\varphi$  – коэффициент теплопроводности, изменяющийся по линейному закону согласно [15];  $\varphi$  – пористость материала, изменяется в пределах от 0 до 1;  $\rho(\varphi) = \rho_m(1-\varphi)$  – плотность пористой пластины,  $\rho_m$  – плотность материала. Свойства материала, из которого изготавливается пористая пластина, приняты в соответствии с работой [16].

Таблица 1 – Свойства материала пористой пластины

Материал	Теплоемкость, Дж/кг°C	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
PETG	1050	1300

Уравнение (4) в общем виде с учетом декартовой системы координат:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{0,1759 - 0,1776\varphi}{c\rho_m(1-\varphi)} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Краевые условия для данной задачи имеют вид:

$$T(x,0) = T_0; \quad (7)$$

$$T(l,t) = T_{cr}; \quad (8)$$

$$T(0,t) = T_{cr}. \quad (9)$$

### Результаты и обсуждение

Решение задачи (6)–(9) отыскивается путем осуществления метода конечных разностей [13, 14]. Метод конечных разностей заключается в построении пространственно-временной сетки с шагами по координате  $\Delta x$  и по времени  $\Delta t$ . В данной задаче применялась сетка вида:

$$x_i = i\Delta x, \quad i = \overline{0, I}; \quad t_k = k\Delta t, \quad k = \overline{0, K}, \quad (10)$$

где  $I, K$  – число шагов по пространственной координате  $x$  и по времени  $t$ .

Согласно выбранному методу, на (10) вводятся сеточные функции  $T_i^k = T(x_i, t_k)$ . Приняв явную разностную схему решения для задачи (6)–(9), математическая постановка примет вид:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{0,1759 - 0,1776\varphi}{c\rho_m(1-\varphi)} \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{\Delta x^2}; \quad (11)$$

$$T_0^k = T_0; \quad (12)$$

$$T_l^k = T_{ст}; \quad (13)$$

$$T_i^0 = T_{ст}. \quad (14)$$

### Заключение и выводы

Согласно уравнению (5), коэффициент температуропроводности зависит от пористости, теплоемкости и плотности материала. При постоянном теплоемкости  $c$  изменение пористости  $\varphi$  не приводит к изменению температуропроводности  $a$ , так как отношение  $\frac{\lambda(\varphi)}{\rho(\varphi)}$  сохраняет постоянное значение (см. рис. 2), в связи с чем коэффициент пористости  $\varphi$  приводит не к изменению температурных кривых в теле, а лишь к изменению количества энергии, протекающего через тело. В настоящей работе исследовано температурное состояние пористой пластины для значений пористости  $\varphi$  в диапазоне 0,4...0,8.

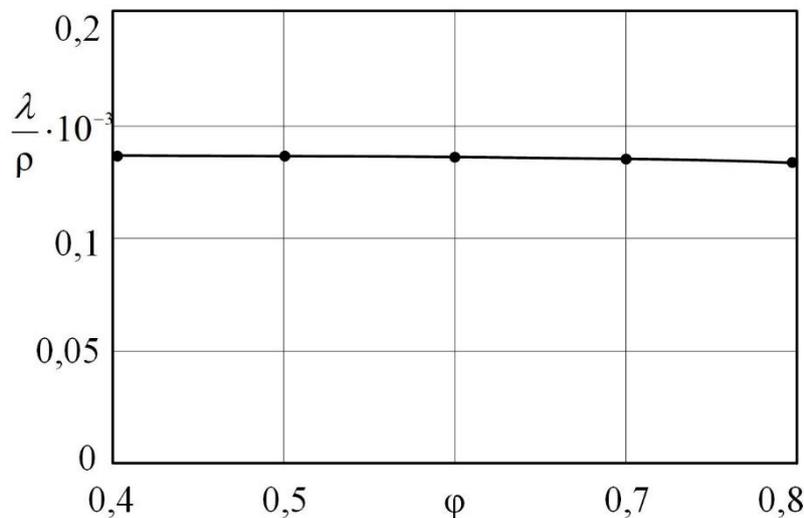


Рисунок 2 – Зависимость отношения  $\frac{\lambda(\varphi)}{\rho(\varphi)}$  от пористости материала  $\varphi$

На рис. 3 представлено численное решение задачи теплопроводности в пористой пластине при значении пористости  $\varphi = 0,9$ , а также при значениях температуры в начальный момент времени  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  и значении температуры на поверхности стенки  $T_{ст} = 100^\circ\text{C}$ . Процесс нагрева пористой пластины можно условно разделить на две стадии. На первой стадии происходит прогревание пластины от поверхности к центру, при этом температура при

$x = 0,005$  (т. е. в центре пластины) остается неизменной. Во второй стадии происходит нагрев пластины во всем исследуемом объеме.

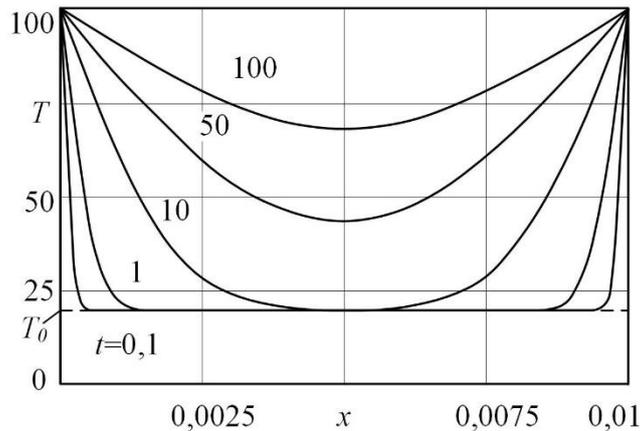


Рисунок 3 – Распределение температуры по координате  $x$

На рис. 4 представлена зависимость распределения плотности теплового потока  $q$  в пористой пластине во времени от значений пористости  $\phi$ . Пунктирной линией представлена плотность теплового потока для сплошного тела, то есть при пористости  $\phi = 0$ . Из анализа данного рисунка следует, что при варьировании коэффициента пористости возможно регулирование значения плотности теплового потока. Следовательно, на основании полученных зависимостей возможно создание пористого материала с заданными теплофизическими свойствами. Полученные результаты могут иметь практическое значение в изучении теплоизоляционных материалов, что связано с возможностью изменения толщины материала и регулирования проходящего теплового потока.

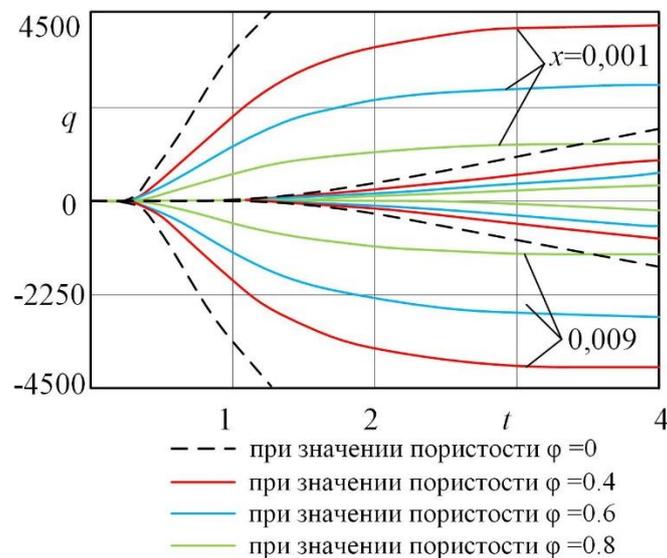


Рисунок 4 – Зависимость распределения теплового потока в пористой пластине от пористости материала

### Литература

1. Kearns, E. R. 3D Printing of Metal-Organic Frameworks for Clean Energy and Environmental Applications / E. R. Kearns, R. Gillespie, D. M. D'Alessandro // *Journal of Materials Chemistry A*. – 2021.
2. Зарубин, В. С. Сравнительный анализ оценок коэффициента теплопроводности каркаса пористого твердого тела / В. С. Зарубин, С. В. Зарубин, Е. С. Сергеева. – Текст : непосредственный // *Машиностроение и компьютерные технологии*. – 2017. – №. 7. – С. 15–30.

3. Yu, S. Investigation of functionally graded TPMS structures fabricated by additive manufacturing / S. Yu, J. Sun, J. Bai // *Materials & Design*. – 2019. – Т. 182. – P. 108021.
4. Asbai-Ghoudan, R. Analytical model for the prediction of permeability of triply periodic minimal surfaces / R. Asbai-Ghoudan, S. R. de Galarreta, N. Rodriguez-Florez // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. – 2021. – Т. 124. – P. 104804.
5. Eremin, A. V. Numerical Study of Hydrodynamic Characteristics of Porous Material Based on Schwarz P Surface / A. V. Eremin et al. // 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). –IEEE, 2021. – Pp. 1030–1032.
6. Дьяченко, С. В. Физико-механические свойства модельного материала с топологией трижды периодических поверхностей минимальной энергии типа гироид в форме куба / С. В. Дьяченко и др. – Текст : непосредственный // *Журнал технической физики*. – 2018. – Т. 88, № 7. – С. 1014.
7. Брагин, Д. М. Исследование теплоизоляционных свойств композиционного материала с структурой ТПМП / Д. М. Брагин, С. А. Зинина, А. В. Еремин. – *Наукофера*, 2021. – № 11(2). – С. 120–124. – Текст : непосредственный.
8. Karmakar S. Numerical investigation of sensing and energy harvesting performance of 0-3 and triply periodic minimal surface-based K 0. 475 N a 0. 475 L i 0. 05 (N b 0. 92 T a 0. 05 S b 0. 03) O 3 and polyethylene piezocomposite: A comparative study / S. Karmakar // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2022. – С. 1045389X211063951.
9. Никитин, М. О. Оценка направленных свойств элементарного излучателя методом конечных разностей во временной области / М. О. Никитин // *Современные проблемы радиофизики и радиотехники*. – 2021. – С. 92. – Текст : непосредственный.
10. Eremin, A. Investigation of the temperature state of fuel elements with a given spatial distribution of heat sources / A. Eremin, K. Gubareva, A. Popov // *AIP Conference Proceedings*. – AIP Publishing LLC, 2022. – Т. 2456, №. 1. – P. 020015.
11. Kudinov, I. V. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems by defining additional boundary conditions / I. V. Kudinov, E. V. Kotova, V. A. Kudinov.
12. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. Школа, 1967. – Текст : непосредственный.
13. Еремин, А. В. Исследование процесса охлаждения многослойной пластины при несимметричных граничных условиях третьего рода / А. В. Еремин. – Текст : непосредственный // *Молодежный научный вестник*. – 2016. – № 10. – С. 68–73.
14. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров : учеб. пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М. : Высш. шк., 1994. – 544 с. – Текст : непосредственный.
15. Попов А. И. Определение эффективного коэффициента теплопроводности пористого материала с упорядоченной структурой, основанной на ТПМП I-WP / А. И. Попов, Д. М. Брагин, С. А. Зинина, А. В. Еремин, О. Д. Олатуйи. – Текст : непосредственный // *Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности*. – Т. 7, № 3(25). – Ч. 1. – 2022. – С. 61–67.
16. Брагин, Д. М. Тепловой поток в пористой упорядоченной структуре на основе топологии SCHOEN'S I-WP(R) / Д. М. Брагин, С. А. Зинина, А. И. Попов, А. С. Шульга, А. В. Еремин. – Текст : непосредственный // *International Scientific Journal.Theoretical & Applied Science*. – 2022. – Volume 14. – P. 145–150.