

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ В СИСТЕМЕ MATLAB**

Самарина Ольга Владимировна

*кандидат физико-математических наук, доцент,
руководитель инженерной школы цифровых технологий,
Югорский государственный университет
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: O_Samarina@ugrasu.ru*

Самарин Валерий Анатольевич

*кандидат технических наук, доцент,
доцент инженерной школы цифровых технологий,
Югорский государственный университет
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: V_Samarin@ugrasu.ru*

Предмет исследования: одноканальное полутонное цифровое изображение, инварианты второго порядка относительно группы движений и растяжений.

Цель исследования: определить новую группу инвариантов одноканального цифрового изображения относительно сдвигов, поворотов и растяжений цифрового изображения.

Методы и объекты исследования: объектом исследования являются одноканальные изображения. Разработанные вычислительные алгоритмы основаны на комплексном использовании аналитических и геометрических методов исследования, теории инвариантов и вейвлетов.

Основные результаты исследования: разработана вычислительная схема определения группы инвариантных характеристик относительно таких преобразований цифрового изображения как сдвиги, повороты и растяжения.

Ключевые слова: одноканальное цифровое изображение, инварианты второго порядка.

**DETERMINATION OF INVARIANT CHARACTERISTICS
FOR DIGITAL IMAGE AND THEIR CALCULATION IN THE MATLAB SYSTEM**

Olga V. Samarina

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of Engineering school of Digital Technologies,
Yugra State University
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: O_Samarina@ugrasu.ru*

Valery A. Samarin

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor school of Digital Engineering ,
Yugra State University
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: V_Samarin@ugrasu.ru*

Subject of research: single-channel digital image, second-order invariants to movements and stretching.

Purpose of research: to determine a new group of invariants of a single-channel digital image with respect to shifts, rotations and stretching.

Methods and objects of research: the object of research is single-channel images. The developed computational algorithms are based on the complex use of analytical and geometric research methods, the theory of invariants and wavelets.

Main results of research: a computational scheme for determining the group of invariant characteristics with respect to such digital image transformations as shifts, rotations and stretching has been developed.

Keywords: single-channel digital image, second-order invariants.

Введение

Инвариантные характеристики изображения являются точным математическим инструментом, позволяющим решать широкий класс задач обработки и анализа одноканальных и многоканальных изображений, таких как распознавание образов, поиск объектов по образцу и другие. Инварианты способны передавать характерные особенности изображения и выступать в роли существенных признаков при преобразованиях первичного изображения, таких как сдвиг, поворот, масштабирование, изменения контрастности и яркости. Также инвариантные характеристики характеризуются способностью к обобщению, что в свою очередь является необходимым качеством для моделей и методов искусственного интеллекта, нейронных сетей.

В настоящее время исследования, направленные на поиск и исследование инвариантных характеристик цифрового изображения, являются достаточно актуальными. Они получают развитие в областях распознавания текста, анализа 3D-изображений [1–3]. Однако на практике реальные цифровые содержат помехи, неточности и шумы. Кроме того, цифровые изображения не являются непрерывными, они определяются значениями пикселей в дискретных координатах. Таким образом перед исследователями встает задача определения методов и моделей обработки цифрового дискретного изображения и определения для данного изображения ряда устойчивых инвариантных характеристик [4].

В данной работе представлены инварианты второго порядка (числовые функции, содержащие производные первого и второго порядков) относительно группы аффинных преобразований, а также яркости, контрастности изображения. Использование в методах обработки и анализа цифровых изображений инвариантов второго порядка позволяет найти достаточно устойчивую относительно помех и шума изображения числовую характеристику и существенно снизить сложность метода, что является ощутимым преимуществом при практической реализации алгоритма.

Результаты и обсуждение

Представим цифровое полутоновое изображение в виде непрерывной функции $f(x, y)$. Будем считать, что данная функция цифрового изображения дважды непрерывно дифференцируема. Тогда справедливо разложение Тейлора второго порядка с произвольной точкой рассматриваемой области в виде центра. При помощи простых преобразований любую точку области можно перевести в начало координат. Тогда функция цифрового полутонового изображения будет иметь вид:

$$f(x, y) = a + p_1 x + p_2 y + \frac{1}{2} (b_{(2,0)} x^2 + 2b_{(1,1)} xy + b_{(0,2)} y^2) + o(x^2 + y^2)$$

В данной записи коэффициенты разложения представляют собой значения функции, дифференциалов первого и второго порядка в начале координат:

$$a = f(0,0), \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

$$b_{(2,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0), \quad b_{(1,1)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \quad b_{(0,2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0).$$

Представим, что цифровое изображение претерпело некоторые преобразования (такие как сдвиг, масштабирование, поворот). Обозначим эту группу преобразований как G . В таком случае можем записать

$$G(\lambda, \rho, \phi): f(x, y) \rightarrow e^\lambda f(e^\rho (x \cos(\phi) - y \sin(\phi)), e^\rho (x \sin(\phi) + y \cos(\phi))).$$

В этой записи коэффициент e^ρ соответствует преобразованию плоскости цифрового изображения, угол ϕ – повороту, а множитель e^λ – можно описать как коэффициент соответствующий частотному диапазону данного изображения, а также как фактор поглощения среды, действующий в окрестности рассматриваемой точки.

Определение. Числовая функция I нетождественно равная константе является инвариантом цифрового изображения порядка k , если она сохраняет свое значение под действием преобразований группы G .

Замечание. Размерность пространства инвариантов определяется по формуле:

$$\dim I = \dim J_3^k - \dim G.$$

Заметим, что группа преобразований $G(\lambda, \rho, \phi)$ действует в пространстве параметров $t = \{a, p_1, p_2, b_{11}, b_{22}, b_{12}\}$ и образует трехмерную коммутативную группу Ли

$$G(\lambda_1, \rho_1, \phi_1) \circ G(\lambda_2, \rho_2, \phi_2) = G(\lambda_1 + \lambda_2, \rho_1 + \rho_2, \phi_1 + \phi_2)$$

Для произвольной функции Φ параметров $\Phi(a, p_1, p_2, b_{11}, b_{22}, b_{12})$ детерминированы инфинитезимальные дифференциальные операторы $X_\lambda \Phi$, $X_\rho \Phi$, $X_\phi \Phi$

Теорема 1. Дифференциальные операторы $X_\lambda \Phi$, $X_\rho \Phi$, $X_\phi \Phi$ представимы в следующем виде

$$X_\lambda \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial a} a + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{11}} b_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{22}} b_{22} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{12}} b_{12},$$

$$X_\rho \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{11}} 2b_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{22}} 2b_{22} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{12}} 2b_{12},$$

$$X_\phi \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} p_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{11}} 2b_{12} - \frac{\partial \Phi}{\partial b_{22}} 2b_{12} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{12}} (-b_{11} + b_{22}).$$

Доказательство:

Параметр t преобразуется по формуле $t \rightarrow \Omega(t)$, т.е.

$$a \rightarrow a e^\lambda, \quad p_1 \rightarrow e^{\lambda+\rho} p_1 \cos(\phi) + e^{\lambda+\rho} p_2 \sin(\phi),$$

$$p_2 \rightarrow -p_1 e^{\lambda+\rho} \sin(\phi) + p_2 e^{\lambda+\rho} \cos(\phi),$$

$$\begin{aligned} b_{11} &\rightarrow e^{2\rho+\lambda} b_{11} \cos^2(\phi) + e^{2\rho+\lambda} b_{12} \sin(\phi) \cos(\phi) - e^{2\rho+\lambda} b_{22} \cos^2(\phi) + e^{2\rho+\lambda} b_{22}, \\ b_{12} &\rightarrow e^{2\rho+\lambda} 2b_{12} \cos^2(\phi) + e^{2\rho+\lambda} b_{22} \cos(\phi) \sin(\phi) - e^{2\rho+\lambda} b_{11} \sin(\phi) \cos(\phi) - e^{2\rho+\lambda} b_{12}, \\ b_{22} &\rightarrow e^{2\rho+\lambda} b_{11} - e^{2\rho+\lambda} b_{11} \cos^2(\phi) - 2e^{2\rho+\lambda} b_{12} \sin(\phi) \cos(\phi) + e^{2\rho+\lambda} b_{22} \cos^2(\phi) \end{aligned}$$

Воспользовавшись данным преобразованием, найдем значения следующих дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\lambda} \Phi(\Omega(t)) \right|_{\lambda=0, \rho=0, \phi=0} &= X_{\lambda} \Phi, \\ \left. \frac{d}{d\rho} \Phi(\Omega(t)) \right|_{\lambda=0, \rho=0, \phi=0} &= X_{\rho} \Phi, \\ \left. \frac{d}{d\phi} \Phi(\Omega(t)) \right|_{\lambda=0, \rho=0, \phi=0} &= X_{\phi} \Phi. \end{aligned}$$

Выполнив вычисления с учетом указанных выше начальных условий, получим:

$$\begin{aligned} X_{\lambda} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial a} a + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{11}} b_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{22}} b_{22} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{12}} b_{12}, \\ X_{\rho} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{11}} 2b_{11} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{22}} 2b_{22} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{12}} 2b_{12}, \\ X_{\phi} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} p_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{11}} 2b_{12} - \frac{\partial \Phi}{\partial b_{22}} 2b_{12} + \frac{\partial F}{\partial b_{12}} (-b_{11} + b_{22}) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Данные функции являются инвариантами цифрового изображения второго порядка относительно группы преобразований, включающих в себя движения, растяжения и калибровку цифрового полутонного изображения:

$$\begin{aligned} Inv_1 &= \frac{(b_{11} + b_{22})(b_{11} p_1^2 + 2b_{12} p_1 p_2 + b_{22} p_2^2)}{(p_1^2 + p_2^2)(b_{11}^2 + 2b_{12}^2 + b_{22}^2)}, \\ Inv_2 &= \frac{(b_{11} + b_{22})(b_{11} p_2^2 - 2b_{12} p_1 p_2 + b_{22} p_1^2)}{(p_1^2 + p_2^2)(b_{11}^2 + 2b_{12}^2 + b_{22}^2)}, \end{aligned}$$

Доказательство.

Проверяется непосредственно.

Замечание. Для представленных инвариантов справедлива следующая оценка:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq Inv_1, Inv_2 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Для выполнения расчетов данных инвариантов в системе Matlab необходимо дополнительно рассмотреть дискретную модель цифрового полутонного изображения.

В силу технических ограничений память компьютера способна хранить и обрабатывать только дискретные числа. Поэтому при оцифровке непрерывная функция изображения $f(x, y)$ превращается в дискретную – возникает прямоугольная решетка точек изображения. И таким образом при любых операциях с использованием цифровых технических средств, таких как хранение, обработка и анализ, полутоновое изображение представляет собой матрицу определенного размера со значениями пикселей в узлах сетки (рис. 1).

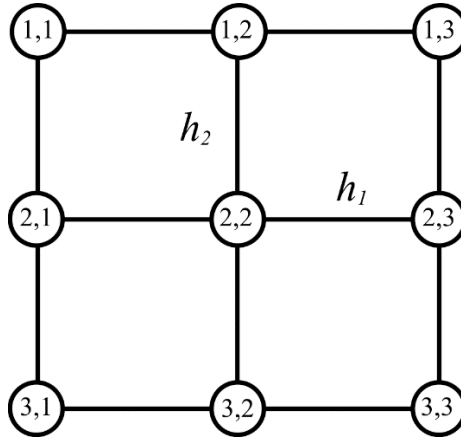


Рисунок 1 – Дискретная сетка цифрового изображения

Система Matlab обладает широкими возможностями обработки и анализа цифровых изображений. При помощи встроенных функций системы была проведена загрузка группы тестовых изображений. Данные группы содержат изображения одной и той же области, но содержащие определенные отличия, такие как уровень яркости, сдвиг по вертикали и горизонтали, угол поворота (рис. 2).



Рисунок 2 – Пример группы изображений

Для каждого из изображений группы были проведены вычисления инвариантных характеристик Inv_1, Inv_2 . Для оценки результативности характеристик рассматривались значения функции распределения разностей между инвариантными характеристиками вычисленных для значения дискретной функции во всех узлах сетки. Проведенные исследования позволяют сделать вывод: для предполагаемого наличия общих областей на изображениях размером $n \times m$ достаточно, чтобы у $0.1^2 \times n \times m$ значений сумма попарных разностей по рассмотренным инвариантным характеристикам не превышала величину $\varepsilon = 200$.

Заключение и выводы

Проведенные теоретические исследования и вычислительные эксперименты позволяют сделать вывод о том, что представленные в данной работе инвариантные характеристики цифрового одноканального изображения относительно группы аффинных преобразований, а

также яркости, контрастности изображения можно эффективно использовать при решении различных задач анализа и обработки цифрового изображений, таких как сортировка изображений, поиск снимков по образцу, распознавание изображений и другие.

Литература

1. Абрамов, Н. С. Обзор методов распознавания образов на основе инвариантов к яркостным и геометрическим преобразованиям / Абрамов Н. С., Фраленко В. П., Хачумов М. В. – Текст : непосредственный // Современные наукоемкие технологии. – 2020. – № 6-1. – С. 110–117.
2. Нгуен, З. Т. Инварианты в задачах распознавания графических образов / Нгуен З. Т. – Текст : непосредственный // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2016. – № 1. – С. 76–85.
3. Самарина, О. В. Применение интегральных топографических характеристик в решении задач обработки данных дистанционного зондирования / Самарина О. В., Славский В. В., Семенов С. П. – Текст : непосредственный // Математические заметки СВФУ. – Январь-март 2020. – Т. 27, № 1. – С. 41–50.
4. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2003. – 608 с. – Текст : непосредственный.