ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 г. Выпуск 3 (66). С. 152–162

УДК 517.982.3
DOI: 10.18822/byusu202203152-162

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ФОРМЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Ушаков Андрей Леонидович
кандидат физико-математических наук, доцент,
сотрудник кафедры математического и компьютерного моделирования,
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет»
Челябинск, Россия
E-mail: ushakoval@susu.ru

Предмет исследования: задача представления линейного функционала в форме скалярного произведения в пространстве Гильберта. Например, это может быть задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в вариационном виде.

Цель исследования: привести общую схему метода итерационных расширений для решения эллиптических краевых задач с условиями Дирихле.

Методы и объекты исследования: объектом исследования в такой задаче может быть деформация мембраны. Приводится продолжение рассматриваемой задачи в пространстве Гильберта. Продолженная задача рассматривается в подпространстве пространства Гильберта. Продолженная задача исследуется методом итерационных расширений в пространстве Евклида. Приводится алгоритм для реализации метода итерационных расширений.

Основные результаты исследования: в результате получается, что общая схема метода итерационных расширений в применении к решению краевой задачи с условиями Дирихле для эллиптического уравнения не зависит от порядка этого уравнения. Приводится пример, иллюстрирующий вывод об эффективности метода итерационных расширений.

Ключевые слова: скалярное произведение; метод итерационных расширений.

INVESTIGATION OF THE PROBLEM OF REPRESENTATION OF A LINEAR FUNCTIONAL IN THE FORM OF A SCOAL PRODUCT

Andrey L. Ushakov
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent,
Senior Research Officer at the Department
of Mathematical and Computer Modelling,
South Ural State University,
Chelyabinsk, Russia
E-mail:ushakoval@susu.ru

Subject of research: the problem of representing a linear functional in the form of a scalar product in the Hilbert space. For example, this may be the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation in variational form.

Purpose of research: to present a general scheme of the method of iterative extensions for solving elliptic boundary value problems with Dirichlet conditions.

Methods and objects of research: the object of study in such a problem can be the deformation of the membrane. A continuation of the considered problem in the Hilbert space is given. The extended problem is considered in a subspace of the Hilbert space. The extended problem is studied by the method of iterative extensions in the Euclidean space. An algorithm for implementing the method of iterative extensions is given.

Main results of research: as a result, it turns out that the general scheme of the method of iterative extensions as applied to the solution of a boundary value problem with Dirichlet conditions for an elliptic equation does not depend on the order of this equation. An example is given to illustrate the conclusion about the efficiency of the method of iterative extensions.

Keywords: scalar product, method of iterative extensions.

Введение

Рассмотрим задачу представления линейного функционала в форме скалярного произведения в гильбертовом пространстве. Примером такой задачи является краевая задача с условиями Дирихле для эллиптического уравнения в плоской ограниченной области. Основные трудности при решении этой задачи возникают от сложности геометрии области, высоты порядка уравнения и наличия краевых условий Дирихле [1–5]. Метод решения такой задачи должен быть асимптотически оптимальны, являться вполне универсальным и иметь достаточно простую реализацию. Будем решать рассматриваемую задачу методом итерационных расширений, являющимся обобщением метода фиктивных компонент [4–7]. Решение исходной задачи рассматривается как обобщение решений методом итерационных расширений краевых задач с условиями Дирихле для эллиптических уравнений. Предполагается, что после сведения решения задачи для эллиптического уравнения к решению соответствующих задач в прямоугольной области можно будет применять оптимальные маршевые методы [8–10].

Результаты и обсуждение

1. Задача представления линейного функционала в форме скалярного произведения в гильбертовом пространстве

Пусть задана первая ограниченная область и выберем вторую ограниченную область

$$\omega \in \{1, \mathrm{II}\},\ \Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Области не пересекаются, а объединение их замыканий является замыканием прямоугольной области

$$\Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,\ \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi}.$$

Предполагаем, что границы этих областей имеют пересечение

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{\mathrm{II}} \neq \varnothing.$$

На первой области рассмотрим задачу представления линейного функционала в форме скалярного произведения в гильбертовом пространстве, на второй области введем фиктивную задачу представления нулевого функционала в форме скалярного произведения в гильбертовом пространстве

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : (\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega} = F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega, \tag{1}$$

$$F_\omega \in \breve{H}'_\omega,\ \breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega),\ F_{\mathrm{II}}(\breve{v}_{\mathrm{II}}) = 0.$$

Предполагается, что рассматриваемые скалярные произведения задаются с помощью симметричных операторов и удовлетворяют соответствующим свойствам скалярного произведения, являются скалярными произведениями, рассматриваемых гильбертовых пространств и обладают свойствами скалярных произведений, задаваемых посредством скалярных произведений функций суммируемых в квадрате

$$0)\ (\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}=(\breve{\mathrm{A}}_\omega\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)\ \forall\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega\in\breve{H}_\omega,$$

$$1)\ (\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}=(\breve{v}_\omega,\breve{u}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}\ \forall\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega\in\breve{H}_\omega,$$

$$2)\ (\breve{u}_\omega+\breve{w}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}=(\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}+(\breve{w}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}\ \forall\breve{u}_\omega,\breve{w}_\omega,\breve{v}_\omega\in\breve{H}_\omega,$$

$$3)\ (c\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}=c(\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}\ \forall c\in\mathbb{R},\forall\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega\in\breve{H}_\omega,$$

$$4)\ (\breve{v}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}>0,\ \breve{v}_\omega\neq 0,\ (\breve{v}_\omega,\breve{v}_\omega)_{\breve{\mathrm{A}}_\omega}=0\Leftrightarrow\breve{v}_\omega=0.$$

Примерами рассматриваемых пространств являются Соболевские пространства функций. Примерами операторов будут симметричные операторы, возникающие в полигармонических краевых задачах. Примером правой части у задач будет скалярное произведение функций, которые суммируемы в квадрате

$$F_\omega(\breve{v}_\omega)=\int\limits_{\Omega_\omega}\breve{f}_\omega\breve{v}_\omega d\Omega_\omega\ \forall\breve{v}_\omega\in\breve{H}_\omega.$$

У каждой из задач существует и единственное решение при этом, у фиктивной задачи это решение нулевое [1].

2. Продолженная задача представления линейного функционала в форме скалярного произведения в гильбертовом пространстве

На прямоугольной области будем рассматривать пространство Гильберта из функций $\breve{V}=\breve{V}(\Pi)$. На этом пространстве зададим скалярное произведение как сумму скалярных произведений

$$(\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}}=(\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}}+(\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\ \forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}.$$

Определим следующие подпространства

$$\breve{V}_1=\breve{V}_1(\Pi)=\left\{\breve{v}_1\in\breve{V}:\breve{v}_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_{\mathrm{I}}}=0\right\},$$

$$\breve{V}_3=\breve{V}_3(\Pi)=\left\{\breve{v}_3\in\breve{V}:\breve{v}_3\big|_{\Pi\setminus\Omega_{\mathrm{II}}}=0\right\},\ \breve{V}_0=\breve{V}_1\oplus\breve{V}_3,$$

$$\breve{V}_2=\breve{V}_2(\Pi)=\left\{\breve{v}_2\in\breve{V}:(\breve{v}_2,\breve{v}_0)_{\breve{\mathrm{A}}}=0\ \forall\breve{v}_0\in\breve{V}_0\right\}.$$

Отметим, что во введенном скалярном произведении

$$\breve{V}=\breve{V}_1\oplus\breve{V}_2\oplus\breve{V}_3=\breve{V}_1\oplus\breve{V}_{\mathrm{II}},\breve{V}_{\mathrm{I}}=\breve{V}_1\oplus\breve{V}_2,\breve{V}_{\mathrm{II}}=\breve{V}_2\oplus\breve{V}_3.$$

Обычно полагать, что для функций выполняются предположения о продолжении функций в следующей форме

$$\exists\breve{\beta}_1\in(0;1],\ \breve{\beta}_2\in[\breve{\beta}_1;1]:\breve{\beta}_1(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}}\le(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\le\breve{\beta}_2(\breve{v}_2,\breve{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}}\ \forall\breve{v}_2\in\breve{V}_2.$$

Заведем оператор проектирования

$$I_1:\breve{V}\mapsto\breve{V}_1,\ \breve{V}_1=im I_1,\ I_1=I_1^2.$$

Будем совместно рассматривать решаемую задачу и фиктивную задачу как продолженную задачу представления линейного функционала в форме скалярного произведения

$$\breve{u}\in\breve{V}:\ (\breve{u},I_1\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}}+(\breve{u},\breve{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}=F_1(I_1\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V},\tag{2}$$

Предложение 1.Имеют место равенства

$$(\breve{u}_0,\breve{v}_2)_{\breve{A}_\omega}=(\breve{v}_2,\breve{u}_0)_{\breve{A}_\omega}=0\ \forall\breve{u}_0\in\breve{V}_0,\ \forall\breve{v}_2\in\breve{V}_2,\ \omega\in\{1,\mathrm{II}\}.$$

Утверждение 1. Задача (2) имеет единственное решение $\breve{u}\in\breve{V}_1$, которое на Ω_1 будет решением задачи (1) при $\omega=1$, а на Ω_{II} будет нулевым решением задачи (1) при $\omega=\mathrm{II}$.

Для решений исходной и продолженной задач можно использовать одно обозначение как для функции и продолжения функции

$$\breve{H}_\omega(\Omega_\omega)=\breve{V}_\omega(\Omega_\omega),\ \omega\in\{1,\mathrm{II}\}.$$

3. Продолженная задача представления линейного функционала в форме скалярного произведения в конечномерном подпространстве

Рассматриваем введенную прямоугольную область и части ее границы в прямоугольных координатах

$$\Pi=(0;b_1)\times(0;b_2),\ b_1,b_2\in(0;+\infty).$$

Полагаем, что введена прямоугольная сетка с узлами, постоянными и положительными шагами в направлении соответствующих осей координат

$$(x_i;y_j),\ h_1,h_2>0,\ i,j\in\mathbb{Z}.$$

Введем сеточные функции, определенные в узлах сетки

$$v_{i,j}=v(x_i;y_j)\in\mathbb{R},\ i,\ j\in\mathbb{Z}.$$

При восполнениях сеточных функций используем в качестве базисных функций функции в узлах сетки, имеющие локальные носители

$$\Phi^{i,j}(x;y)=\Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i,\ j\in\mathbb{Z}.$$

Полагаем, что эти базисные функции вне прямоугольной области будут равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y)=0,\ (x;y)\notin\Pi,\ i,\ j\in\mathbb{Z}.$$

Рассматриваем линейные комбинации из базисных функций, которые являются конечномерным подпространством

$$\tilde{V}=\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y)\right\}\subset\breve{V}.$$

Важным примером аппроксимации пространств Соболева является кусочно-полиномиальная аппроксимация в виде конечных элементов при решении эллиптических краевых задач [1].

Приведем продолженную задачу в конечномерном пространстве.

$$\tilde{u}\in\tilde{V}:(\tilde{u},I_1\tilde{v})_{\breve{A}_1}+(\tilde{u},\tilde{v})_{\breve{A}_{\mathrm{II}}}=F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V}. \tag{3}$$

Введем следующие подпространства

$$\tilde{V}_1=\tilde{V}_1(\Pi)=\left\{\tilde{v}_1\in\tilde{V}:\tilde{v}_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_1}=0\right\},$$

$$\tilde{V}_3=\tilde{V}_3(\Pi)=\left\{\tilde{v}_3\in\tilde{V}:\tilde{v}_3\big|_{\Pi\setminus\Omega_{\mathrm{II}}}=0\right\},\quad \tilde{V}_0=\tilde{V}_1\oplus\tilde{V}_3,$$

$$\tilde{V}_2=\tilde{V}_2(\Pi)=\left\{\tilde{v}_2\in\tilde{V}:(\tilde{v}_2,\tilde{v}_0)_{\breve{A}}=0\ \forall\tilde{v}_0\in\tilde{V}_0\right\},$$

Отметим, что

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_{\mathrm{II}}, \tilde{V}_{\mathrm{I}} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2, \tilde{V}_{\mathrm{II}} = \tilde{V}_2 \oplus \tilde{V}_3.$$

Полагаем, что для функций и на конечномерном подпространстве выполняются предположения о продолжении функций в следующей форме

$$\exists \beta_1 \in (0;1],\ \beta_2 \in [\beta_1;1]:\ \beta_1(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}} \le (\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}} \le \beta_2(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)_{\breve{\mathrm{A}}}\ \ \forall \tilde{v}_2 \in \tilde{V}_2.$$

Будем использовать такой оператор проектирования под действием, которого обнуляются коэффициенты при базисных функциях, если носители этих функций не лежат полностью на первой области

$$I_1 : \tilde{V} \mapsto \tilde{V}_1,\ \tilde{V}_1 = im\, I_1,\, I_1 = I_1^2.$$

Приведем продолженную задачу в матричном виде, определив матрицу и правую часть системы следующим образом

$$\left\langle B\overline{u},\overline{v}\right\rangle = (\tilde{u},I_1\tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{I}}} + (\tilde{u},\tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_{\mathrm{II}}}\ \ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V},\ \left\langle \overline{f},\overline{v}\right\rangle = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \overline{f},\overline{v}\right\rangle = (\overline{f},\overline{v})h_1h_2 = \overline{f}\overline{v}h_1h_2,\ \overline{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_N)' \in \mathbb{R}^N,\ N \in \mathbb{N}.$$

Так аппроксимируя продолженную задачу с помощью конечномерного подпространства, получим систему уравнений

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N : B\overline{u} = \overline{f},\ \overline{f} \in \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Занумеруем первыми базисные функции с носителями в первой области. Вторыми занумеруем базисные функции с носителями, пересекающими границы первой области и второй области сразу. Третьими занумеруем базисные функции с носителями во второй области. При этой нумерации векторы имеют такой вид.

$$\overline{v} = (\overline{v}_1{}',\overline{v}_2{}',\overline{v}_3{}')',\ \overline{u} = (\overline{u}_1{}',\overline{0}'\,\overline{0}')',\ \overline{f} = (\overline{f}_1{}',\overline{0}'\,\overline{0}')'.$$

Отметим, что решается продолженная задача в следующем матричном виде

$$B\overline{u} = \overline{f},\quad \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{f}_1 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}.$$

Так решается исходная задача в матричном виде и фиктивная задача в матричном виде.

$$\mathrm{A}_{11}\overline{u}_1 = \overline{f}_1,\quad \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}.$$

Введем подпространства векторов

$$\overline{V}_1 = \left\{ \overline{v} = (\overline{v}_1{}',\overline{v}_2{}',\overline{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \overline{v}_2 = \overline{0},\ \overline{v}_3 = \overline{0} \right\}.$$

$$\overline{V}_3 = \left\{ \overline{v} = (\overline{v}_1{}',\overline{v}_2{}',\overline{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \overline{v}_1 = \overline{0},\ \overline{v}_2 = \overline{0} \right\},$$

$$\overline{V}_2 = \left\{ \overline{v} = (\overline{v}_1{}',\overline{v}_2{}',\overline{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \mathrm{A}_{11}\overline{v}_1 + \mathrm{A}_{12}\overline{v}_2 = \overline{0},\ \mathrm{A}_{32}\overline{v}_2 + \mathrm{A}_{33}\overline{v}_3 = \overline{0} \right\},$$

$$\mathbb{R}^N = \overline{V}_1 \oplus \overline{V}_2 \oplus \overline{V}_3 = \overline{V}_1 \oplus \overline{V}_{\mathrm{II}}, \overline{V}_{\mathrm{I}} = \overline{V}_1 \oplus \overline{V}_2, \overline{V}_{\mathrm{II}} = \overline{V}_2 \oplus \overline{V}_3.$$

Определим матрицы

$$\left\langle \mathrm{A_I}\overline{u},\overline{v}\right\rangle = (\tilde{u},\tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_\mathrm{I}},\ \left\langle \mathrm{A_{II}}\overline{u},\overline{v}\right\rangle = (\tilde{u},\tilde{v})_{\breve{\mathrm{A}}_\mathrm{II}}\quad \forall \tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V},\quad \mathrm{A}=\mathrm{A_I}+\mathrm{A_{II}}.$$

Для конечномерных подпространств можно записать прежние предположения, касающиеся продолжения функций в матричной форме

$$\exists\beta_1\in(0;+\infty),\ \beta_2\in[\beta_1;+\infty):\beta_1\left\langle \mathrm{A}\overline{v}_2,\overline{v}_2\right\rangle\le\left\langle \mathrm{A_{II}}\overline{v}_2,\overline{v}_2\right\rangle\le\beta_2\left\langle \mathrm{A}\overline{v}_2,\overline{v}_2\right\rangle\ \forall\overline{v}_2\in\overline{V}_2.$$

4. Метод итерационных расширений

Введем матрицу

$$C=\mathrm{A_I}+\gamma\mathrm{A_{II}},\ \gamma\in(0;+\infty).$$

Считаем, что выполняются предположения, записываемые в матричном виде

$$\exists\gamma_1\in(0;+\infty),\ \gamma_2\in[\gamma_1;+\infty):\gamma_1^2\left\langle C\overline{v}_2,C\overline{v}_2\right\rangle\le\left\langle \mathrm{A_{II}}\overline{v}_2,\mathrm{A_{II}}\overline{v}_2\right\rangle\le\gamma_2^2\left\langle C\overline{v}_2,C\overline{v}_2\right\rangle\ \forall\overline{v}_2\in\overline{V}_2,$$

$$\exists\alpha\in(0;+\infty):\left\langle \mathrm{A_I}\overline{v}_2,\mathrm{A_I}\overline{v}_2\right\rangle\le\alpha^2\left\langle \mathrm{A_{II}}\overline{v}_2,\mathrm{A_{II}}\overline{v}_2\right\rangle\ \forall\overline{v}_2\in\overline{V}_2.$$

Рассмотрим для решения задачи (4) метод итерационных расширений как обобщение известного метода фиктивных компонент, используя введение дополнительного параметра. Метод фиктивных компонент при единичном значении этого параметра получается из метода итерационных расширений, если не учитывать выбор итерационных параметров

$$\overline{u}^k\in\mathbb{R}^N:C(\overline{u}^k-\overline{u}^{k-1})=-\tau_{k-1}(B\overline{u}^{k-1}-\overline{f}),\ k\in\mathbb{N},$$

$$\forall\overline{u}^0\in\overline{V}_1,\ \gamma>\alpha,\ \tau_0=1,\ \tau_{k-1}=\left\langle\overline{r}^{k-1},\overline{\eta}^{k-1}\right\rangle\Big/\left\langle\overline{\eta}^{k-1},\overline{\eta}^{k-1}\right\rangle,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\tag{5}$$

где при вычислениях итерационных параметров надо находить невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\overline{r}^{k-1}=B\overline{u}^{k-1}-\overline{f},\ \overline{w}^{k-1}=C^{-1}\overline{r}^{k-1},\ \eta^{k-1}=B\overline{w}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Введем норму

$$\|\overline{v}\|_{C^2}=\sqrt{\left\langle C^2\overline{v},\overline{v}\right\rangle}\ \forall\overline{v}\in\mathbb{R}^N.$$

Лемма 1. Для метода итерационных расширений (5) имеет место оценка

$$\left\|\overline{u}^1-\overline{u}\right\|_{C^2}\le 2\left\|\overline{u}^0-\overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Доказательство. Обозначим ошибки для итерационного процесса (5)

$$\overline{\psi}^k=\overline{u}^k-\overline{u},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

При начальном применении итерационного процесса выполняются следующие равенства

$$\left\langle C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0),C(\overline{\psi}^1-\overline{\psi}^0)\right\rangle=\left\langle -\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0,-\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle,$$

$$\left\langle C\overline{\psi}^1,C\overline{\psi}^1\right\rangle-2\left\langle C\overline{\psi}^1,\mathrm{A}\overline{\psi}^0\right\rangle+\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle=\left\langle \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0,\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle.$$

Можно заметить, что выполняется неравенство

$$\left\langle C\overline{\psi}^0,C\overline{\psi}^0\right\rangle\ge\left\langle \mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0,\mathrm{A}_{11}\overline{\psi}_1^0\right\rangle.$$

Используя прежнее неравенство, получим следующие неравенства

$$\left\langle C\overline{\psi},^1 C\overline{\psi}^1\right\rangle - 2\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^0\right\rangle \le 0,$$

$$\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1\right\rangle^2 \le 4\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^0\right\rangle^2 \le 4\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1\right\rangle\left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0\right\rangle.$$

При сокращении получим такие неравенства

$$\left\langle C\overline{\psi}^1, C\overline{\psi}^1\right\rangle \le 4\left\langle C\overline{\psi}^0, C\overline{\psi}^0\right\rangle, \left\|\overline{\psi}^1\right\|_{C^2} \le 2\left\|\overline{\psi}^0\right\|_{C^2}, \left\|\overline{u}^1 - \overline{u}\right\|_{C^2} \le 2\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{C^2}.$$

Теорема 1. Для метода итерационных расширений из (5) имеют место такие оценки для сходимости приближенных решений к точному решению задачи из (4)

$$\left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_{C^2} \le \varepsilon\left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{C^2}, \ \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1}, \ k \in \mathbb{N},$$

где относительные ошибки оцениваются сверху в более сильной норме, чем энергетическая норма бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Доказательство.В итерационном процессе получаем соотношения для ошибок, невязок

$$\overline{\psi}^k = \overline{\psi}^{k-1} - \tau_k C^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k-1}, \ \overline{r}^k = \overline{r}^{k-1} - \tau_k \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \ k \in \mathbb{N}\setminus 1.$$

Будем минимизировать невязки

$$0 \le \left\langle \overline{r}^k, \overline{r}^k\right\rangle = \tau_k^2\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}\right\rangle - 2\tau_k\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1}\right\rangle + \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1}\right\rangle.$$

Определяем итерационные параметры при условии минимизации невязок

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \overline{\eta}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1}\right\rangle}.$$

Получим равенства

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}\right\rangle} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1}\right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1}\right\rangle}.$$

Введем обозначения

$$\mathrm{A}_{\mathrm{I}}\overline{w}^{k-1} = \overline{a}, \ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1} = \overline{b}.$$

Замечаем положительность итерационных параметров

$$\tau_k = \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma\overline{b}\right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b}\right\rangle} = \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{b}\right\rangle}{\left\langle \overline{b}, \overline{b}\right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a}\right\rangle^{1/2}\left\langle \overline{b}, \overline{b}\right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b}\right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \overline{a}, \overline{a}\right\rangle^{1/2}}{\left\langle \overline{b}, \overline{b}\right\rangle^{1/2}} \ge \gamma - \alpha > 0.$$

Для выбранных итерационных параметров получается, что

$$\left\langle \overline{r}^k, \overline{r}^k\right\rangle = \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1}\right\rangle - \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1}\right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}\right\rangle}.$$

Выписываем отношение скалярных произведений невязок для соседних итераций

$$q_k^2 = \frac{\left\langle \overline{r}^k, \overline{r}^k \right\rangle}{\left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle} = 1 - \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1} \overline{r}^{k-1} \right\rangle \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle} =$$

$$= \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle - \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle^2}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{w}^{k-1} \right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1}, C\overline{w}^{k-1} \right\rangle} =$$

$$= \frac{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle - \left\langle \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle^2}{\left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle \left\langle \overline{a} + \gamma \overline{b}, \overline{a} + \gamma \overline{b} \right\rangle}.$$

Вводим обозначения

$$\left\langle \overline{a}, \overline{a} \right\rangle = a, \ \left\langle \overline{b}, \overline{b} \right\rangle = b, \ \left\langle \overline{a}, \overline{b} \right\rangle = z,$$

тогда

$$q_k^2 = \frac{ab - z^2}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)} \le \max_{|z| \le \sqrt{ab}} q_k^2(z) = q_k^2\left(\frac{-a}{\gamma}\right) = \frac{a}{\gamma^2 b} \le \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = q^2,$$

учитывая, что

$$q_k^2 \ge 0, \left(q_k^2(z)\right)'_z = \frac{-2\gamma(z + a/\gamma)(z + \gamma b)}{b(a + \gamma^2 b + 2\gamma z)^2},$$

$$-\gamma b < \frac{a + \gamma^2 b}{2\gamma} < -\sqrt{ab} < -\frac{a}{\gamma} < \sqrt{ab}.$$

Так устанавливаем неравенства

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle \le q^2 \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^{k-1} \right\rangle,$$

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle \le q^{2(k-1)} \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1 \right\rangle, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Учитывая, что

$$\left\langle C\overline{\psi}^k, \ C\overline{\psi}^k \right\rangle \le \gamma_1^{-2} \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^k \right\rangle,$$

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} \overline{\psi}^1 \right\rangle \le \gamma_2^2 \left\langle C\overline{\psi}^1, \ C\overline{\psi}^1 \right\rangle \le 4\gamma_2^2 \left\langle C\overline{\psi}^0, \ C\overline{\psi}^0 \right\rangle,$$

получаем неравенство для оценки сходимости у метода итерационных расширений

$$\left\langle C\overline{\psi}^k, \ C\overline{\psi}^k \right\rangle \le 4\gamma_1^{-2} \gamma_2^2 q^{2(k-1)} \left\langle C\overline{\psi}^0, \ C\overline{\psi}^0 \right\rangle.$$

5. Алгоритм метода итерационных расширений

Для выбора итерационных параметров используем метод минимальных невязок.

I. Берем начальное приближение, итерационный параметр

$$\forall \overline{u}^0 = \begin{bmatrix} \overline{u}_1^0 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix} \in \overline{V}_1,$$

$$\tau_0 = 1.$$

II.Вычисляем невязку

$$\overline{r}^{k-1} = B\overline{u}^{k-1} - \overline{f},\ k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{bmatrix} \overline{r}_1^0 \\ \overline{r}_2^0 \\ \overline{r}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\overline{u}_1^0 - \overline{f}_1 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \overline{r}_1^{k-1} \\ \overline{r}_2^{k-1} \\ \overline{r}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \mathrm{A}_{02}\overline{u}_2^{k-1} + \mathrm{A}_{23}\overline{u}_3^{k-1} \\ \overline{0} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

III. Вычисляем квадрат нормы абсолютной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{r}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\langle \overline{r}_1^0, \overline{r}_1^0 \right\rangle,$$

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \overline{r}_2^{k-1}, \overline{r}_2^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

IV. Находим поправку

$$\overline{w}^{k-1} : C\overline{w}^{k-1} = \overline{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{bmatrix} \overline{w}_1^0 \\ \overline{w}_2^0 \\ \overline{w}_3^0 \end{bmatrix} \in \overline{V}_1 : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_1^0 \\ \overline{w}_2^0 \\ \overline{w}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{r}_1^0 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0;+\infty),$$

$$\begin{bmatrix} \overline{w}_1^{k-1} \\ \overline{w}_2^{k-1} \\ \overline{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \overline{V}_2 : \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} + \gamma\mathrm{A}_{02} & \gamma\mathrm{A}_{23} \\ 0 & \gamma\mathrm{A}_{32} & \gamma\mathrm{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w}_1^{k-1} \\ \overline{w}_2^{k-1} \\ \overline{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{r}_2^{k-1} \\ \overline{0} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0;+\infty),\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

V.Вычисляем эквивалентную невязку

$$\overline{\eta}^{k-1} = B\overline{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\eta}_1^{k-1} \\ \overline{\eta}_2^{k-1} \\ \overline{\eta}_3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \mathrm{A}_{02}\overline{w}_2^{k-1} + \mathrm{A}_{23}\overline{w}_3^{k-1} \\ \overline{0} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

VI. Вычисляем итерационный параметр

$$\tau_{k-1} = \left\langle \overline{r}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \overline{\eta}^{k-1}, \overline{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

$$\tau_{k-1} = \left\langle \overline{r}_2^{k-1}, \overline{\eta}_2^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \overline{\eta}_2^{k-1}, \overline{\eta}_2^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

VII. Вычисляем очередное приближение

$$\overline{u}^k = \overline{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\overline{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_1^k \\ \overline{u}_2^k \\ \overline{u}_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{u}_1^{k-1} \\ \overline{u}_2^{k-1} \\ \overline{u}_3^{k-1} \end{bmatrix} - \tau_{k-1} \begin{bmatrix} \overline{w}_1^{k-1} \\ \overline{w}_2^{k-1} \\ \overline{w}_3^{k-1} \end{bmatrix} \in \overline{V}_{\mathrm{I}},\ k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Устанавливаем критерий завершения работы по заданной оценке ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}_0\mathrm{E}^2,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},\ \mathrm{E} \in (0;\,1).$$

6. Пример использования метода итерационных расширений

Рассмотрим следующие области

$$\Pi = (0;6)\times(0;6),\ \Omega_{\mathrm{I}} = (0;6)\times(1;4),\ \Omega_{\mathrm{II}} = (0;6)\times(0;1)\cup(0;6)\times(4;6).$$

Пусть у областей следующие границы.

$$\Gamma_1 = (0;6)\times\{6\},\ \Gamma_2 = \{0,\,6\}\times(0;6)\cup(0;6)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{I},1} = (0;6)\times\{1,\,4\},\ \Gamma_{\mathrm{I},2} = \{0,\,6\}\times(1;4),\ \Gamma_{\mathrm{II},1} = (0;6)\times\{6\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},2} = (0;6)\times\{0,\,1,\,4\}\cup\{0,\,6\}\times(0;1)\cup\{0,\,6\}\times(4;6).$$

Рассмотрим задачу

$$-\Delta\breve{u}_\omega + \kappa_\omega\breve{u}_\omega = \breve{f}_\omega,\ \kappa_{\mathrm{I}} = 0,\ \kappa_{\mathrm{II}} \ge 0,\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,$$

$$\breve{u}_\omega\Big|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0,\ \frac{\partial\breve{u}_\omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{\omega,2}} = 0.$$

Выберем правую часть, коэффициент в уравнении

$$\breve{f}_{\mathrm{I}}(x;y) = 2,\ (x;y) \in (0;6)\times(1;4),$$

$$\kappa_{\mathrm{II}}(x;y) = 2,\ (x;y) \in (0;6)\times(0;1),\ \ \kappa_{\mathrm{II}}(x;y) = 0,\ (x;y) \in (0;6)\times(4;6).$$

Известно решение задачи

$$\breve{u}_{\mathrm{I}}(x;y) = (y-1)(4-y),\ (x;y) \in (0;6)\times(1;4).$$

При дискретизации задаем шаги сетки

$$h_1 = h_2 = h = 6/n,\ n = 78, 84, 90, 96, 102.$$

В прямоугольной области задаем сетку с узлами

$$(x_i;y_j) = \big((i-1)h;(j-1)h\big),\ i = 1,2,\dots,n+1,\ j = 1,2,\dots,n.$$

Применяем метод итерационных расширений с параметром $\gamma = 1$ при нулевом начальном приближении. Процесс завершает работу всегда на восьмой итерации при заданной оценке ошибки $\mathrm{E} = 0{,}0001$. На восьмой итерации при $n = 102$ имеют место неравенства

$$\max_{(x_i;y_j)\in\Omega_{\mathrm{I}}}\left(\left|u_{i,j}^8 - u_{i,j}\right| \big/ \left|u_{i,j}\right|\right) \le 0{,}000065,$$

$$\max_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\left|u_{i,j}^8-u_{i,j}\right|\Big/\max_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\left|u_{i,j}\right|\le 0{,}0000005.$$

Заключение и выводы

Разработанный асимптотически оптимальный метод итерационных расширений можно использовать при численном решении краевых задач Дирихле для эллиптических уравнений.

Литература

1. Aubin, J.-P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems / J.-P. Aubin. – New York : Wiley-Interscience, 1972. – 360 p.
2. Sorokin, S. B. An Economical Algorithm for Numerical Solution of the Problem of Identifying the Right-Hand Side of the Poisson Equation / S. B. Sorokin // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2018. – Vol. 12, № 2. – P. 362–368.
3. Sorokin, S. B. An Efficient Direct Method for the Numerical Solution to the Cauchy Problem for the Laplace Equation / S. B. Sorokin // Numerical Analysis and Applications. – 2019. – Vol. 12, №12. – P. 87–103.
4. Ushakov, A. L. Investigation of a Mixed Boundary Value Problem for the Poisson Equation / A. L. Ushakov // 2020 International. Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia. – 2020. – P. 273–278.
5. Ushakov, A. L. Research of the boundary value problem for the Sophie GermainEquationinin in a cyber-physical system / A. L. Ushakov // Studies in Systems, Decision and Control. Springer. – 2021. – Vol. 338. – P. 51–63.
6. Мацокин, А. М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А. М. Мацокин, С. В. Непомнящих. – Текст: непосредственный // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 33, №1. – С. 52–68.
7. Marchuk, G. I. Fictitious Domain and Domain Decomposion Methods / G. I. Marchuk, Yu. A. Kuznetsov, A. M. Matsokin // Russian Journal of Numerical. Analysis and Mathematical Modelling. – 1986. – Vol. 1, Iss. 1. – P. 3–35.
8. Bank, R. E. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems / R. E. Bank, D. J. Rose // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1977. – Vol. 14, № 5. – P. 792–829.
9. Manteuffel, T. An Incomlete Factorization Technigue for Positive Definite Linear Systems / T. Manteuffel // Mathematics of Computation. – 1980. – Vol. 38, № 1. – P. 114–123.
10. Swarztrauber, P. N. The Method of Cyclic Reduction, Fourier Analysis and FACR Algorithms for the Discrete Solution of Poisson’s Equations on a Rectangle / P. N. Swarztrauber // SIAM Review. – 1977. – Vol. 19, № 3. – P. 490–501.