ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 г. Выпуск 3 (50). С. 67–74

DOI: 10.17816/byusu2018067-74
УДК 517.956

Е. М. Короткова

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА И ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ В СИСТЕМАХ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе рассматривается вопрос о корректности задачи об определении функции источника и параметров среды в системах тепломассопереноса с неполными данными переопределения. Условия переопределения есть значения части вектора решений во внутренних точках области.

Ключевые слова: параболическая система, обратная задача, тепломассоперенос, краевая задача.

E. M. Korotkova

RESTORATION OF THE FUNCTION OF THE SOURCE AND ENVIRONMENTAL PARAMETERS IN HEAT AND MASS TRANSFER SYSTEMS WITH INCOMPLETE DATA OF OVERDETERMINATION

The question of well-posedness of the problem of recovering a source function and parameters of an environment in the heat-and-mass transfer systems with incomplete data of overdetermination is considered. The overdetermination conditions are values of a part of the vector of a solution in interior points of a domain.

Keywords: Parabolic system, inverse problem, heat-and-mass transfer, boundary value problem.

Введение

Рассмотрим параболическую систему уравнений, записанную в следующем виде:

$$u_t + A(t,x,D_x)u = \sum_{l=1}^{r} b_l(t,x)q_l(t) + f, (t,x) \in Q, (1),$$

где $Q = (0,T) \times G$, а G – ограниченная область в R^n с границей Γ класса C^2. Здесь b_l, $l = 1, 2, \dots, r$ и f – заданные вектор-функции, причем компоненты b_l, начиная с некоторого номера $r_0 + 1$ $(r_0 < h)$, равны нулю, а A – матричный эллиптический оператор второго порядка с матричными коэффициентами размерности $h \times h$:

$$A(t,x,D_x) = \sum_{l=r+1}^{sr_0} q_l(t)A_l(t,x,D_x) + A_{sr_0+1}(t,x,D_x),$$

$$A_l = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^l(t,x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^l(t,x)u_{x_i} + a_0^l(t,x)u, l = r+1, \dots, sr_0 + 1.$$

В работе рассматривается коэффициентная обратная задача. В (1) неизвестными являются решение u и функции $q_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, sr_0$ $(sr_0 \geq r)$, входящие как в правую часть (1), так и в оператор A как коэффициенты, а условия переопределения являются точечными.

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями:

$$u|_{t=0} = u_0, B\, u|_S = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{1i}(t,x)u_{x_i} + \sigma_2(t,x)u|_S = g(t,x), (2),$$

где σ_{1i} $(i = 1, 2, \dots, n)$, σ_2 – матрицы размера $h \times h$ и $S = (0,T) \times \Gamma$. В случае задачи Дирихле, то есть $\sigma_{1i} \equiv 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$ будем считать, что $\sigma_2(t,x) \equiv E$, где E – единичная матрица.

Обозначим через $P_0 a$ вектор длины $r_0 < h$, координаты которого совпадают с первыми r_0 координатами исходного вектора a длины h. Условия переопределения для нахождения функций q_l записываются в следующем виде:

$$P_0 u|_{x=x_j} = \psi_j(t), j = 1, 2, \dots, s, (3)\ ,$$

где $\{x_j\}_{j=1}^{s}$ – множество внутренних точек, лежащих в области G и ψ_j, $j = 1, 2, \dots, s$ – заданные вектор-функции.

Проблемы такого вида возникают во многих задачах: при описании диффузионных процессов, процессов тепломассопереноса, а также процессов фильтрации. Подобные модели возникают также при описании и ряда других областей (например, модель динамики популяции, модель фазового поля, для изучения фазовых переходов, модель смешивания пресной и морской грунтовых вод, модель диффузии и вязко-упругой релаксации в полимерах). Одной из моделей, возникающих при описании процессов тепломассопереноса, является система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями для температуры и концентраций переносимых веществ. По данным измерений на сечениях канала или некоторым другим характеристикам определяются те или иные параметры в задаче (коэффициенты уравнений) или плотности источников (правая часть).

В одномерном случае, когда $n = 1$, такие линейная и нелинейная задачи были изучены в пространствах Гельдера в [1]. Можно отметить работы [2], [3], где были рассмотрены задачи вида (1), (2) в общей постановке. В данной работе при выполнении условия параболичности приводятся оценки устойчивости решений задачи (1)–(3) в пространствах Соболева и получена также локальная по времени корректность, то есть доказано существование, единственность и непрерывная зависимость решений от данных задачи.

Основные результаты

Пусть E – банахово пространство. Обозначим через $L_p(G; E)$ пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой. В работе будут использоваться пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^k(\bar{G})$, пространства Соболева $W_p^s(G; E)$, Бесова $B_{pp}^s(G; E)$. Определение указанных выше пространств может быть найдено в [4]. Будем говорить, что $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\bar{G})$) для заданной вектор-функции u, когда каждая компонента u_i принадлежит $W_p^s(G)$ (или $C^k(\bar{G})$). Норма в соответствующем пространстве – сумма норм координат. Аналогичное соглашение принимается и для матриц.

Для заданного интервала $J = (0,T)$, положим

$$W_p^{s,r}(Q) = W_p^r\left(J; L_p(G)\right) \cap L_p\left(J; W_p^s(G)\right)$$

и

$$W_p^{s,r}(S) = W_p^r\left(J; L_p(\Gamma)\right) \cap L_p\left(J; W_p^s(\Gamma)\right).$$

Положим $\mathrm{U}_{\delta_j} = B_\delta(x_j), j = 1,2, \dots, s$. Для упрощения записей в дальнейшем будут использоваться следующие обозначения: $Q^\tau = (0,\tau) \times \mathrm{G}, Q_0 = (0,\mathrm{T}) \times \Omega$, $S^\tau = (0,\tau) \times \partial \mathrm{G}$, $S_0 = (0,\mathrm{T}) \times \partial\Omega$, $Q_0^\tau = (0,\tau) \times \Omega$, $\mathrm{G}_\delta = \cup_i \mathrm{U}_{\delta \mathrm{i}}$, $\Gamma_\delta = \Gamma \cap \partial\, \mathrm{G}_\delta$, $\mathrm{S}_\delta = (0,\mathrm{T}) \times \Gamma_\delta$, $Q_{\delta \mathrm{i}}^\tau = (0,\mathrm{T}) \times \mathrm{U}_{\delta\mathrm{i}}$, $Q_\delta = (0,\mathrm{T}) \times \mathrm{G}_\delta$ и $Q_\delta^\tau = (0,\tau) \times \mathrm{G}_\delta$.

Далее всюду будем считать, что параметр $p > n + 2$ и зафиксирован. Условия на коэффициенты оператора A и граничный оператор B стандартные (это те же условия, что возникают и при решении прямой задачи для параболических систем). Считаем, что выполнено:

$$a_i^l(t,x) \in L_\infty(Q), a_0(t,x) \in L_\infty(Q),$$
$$a_{ij}^l(t,x) \in C(\bar{Q}), i,j = 1,2,\dots,n, l = r+1,\dots,sr_0+1, (4)$$
$$\sigma_{1i}(t,x) \in C^{1/2,1}(\bar{S}), i = 1,2,\dots,n, \sigma_2(t,x) \in C^{1/2,1}(\bar{S}).$$
$$b_j(t,x) \in L_\infty(Q), \partial_{x_i} b_j(t,x) \in L_\infty(Q_\delta), i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,r. (5)$$

Также запишем дополнительные условия гладкости на коэффициенты:

$$\partial_{x_i} a_{ij}^l, \partial_{x_i} a_i^l, \partial_{x_i} a_i^0 \in L_\infty(Q_\delta), i,j = 1,2,\dots,n, l = r+1,\dots,sr_0+1, (6)$$
$$\partial_{x_i}\sigma_{1j}(t,x) \in C^{1/2,1}(\overline{S_\delta}), \partial_{x_i}\sigma_2(t,x) \in C^{1/2,1}(\overline{S_\delta}), i,j = 1,2,\dots,n.$$

Положим:

$$A^0(t,x,D_x) = \sum_{l=r+1}^{sr_0} q_l^0(0) A_l(t,x,D_x) + A_{sr_0+1}(t,x,D_x),$$
$$A_0^0(t,x,D_x) = \sum_{l=r+1}^{sr_0} q_l^0(0) A_{0l}(t,x,D_x) + A_{0sr_0+1}(t,x,D_x),$$

где $A_{0l}(t,x,\xi) = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^l(t,x)\xi_{x_i x_j}$, и предположим, что оператор $\partial_t + A^0$ параболичен: найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена $\det(A_0^0(t,x,i\xi) + pE) = 0$ (где E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству:

$$\operatorname{Re} p \le -\delta_1 |\xi|^2 \; \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall (t,x) \in Q. (7)$$

Условие Лопатинского сформулируем в следующем виде. Для любой точки $(t_0,x_0) \in S$ запишем операторы A_0^0 и B_0 (B_0 – главная часть оператора B, $B_0 u = u$ в случае условий Дирихле и $B_0 u = \sum_{i=1}^n \sigma_{1i} u_{x_i}$ в противном случае), вычисленные в данной точке в локальной системе координат y. Предположим, что система

$$\left(\lambda E + A_0(i\xi', \partial_{y_n})\right) v(y_n) = 0, B_0(i\xi', \partial_{y_n}) v|_{y_n=0} = h \in \mathbb{C}^h, (8)$$

где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$ имеет единственное решение в $C(\overline{\mathbb{R}^+}; \mathbb{C}^h)$, убывающее на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda| \le \pi/2$ и $h \in \mathbb{C}^h$, таких, что $|\xi'| + |\lambda| \ne 0$.

Запишем условия согласования и гладкости данных. Имеем:

$$\psi_j(0) = P_0 u_0(x_j), B(0,x) u_0|_\Gamma = g(0,x), (9)$$
$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G), \nabla u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_\delta), \psi_j(t) \in C^1([0,T]), (10)$$
$$f \in L_p(\mathrm{Q}), \nabla_x f \in L_p(\mathrm{Q}_\delta), f(t,x_j) \in C([0,T]), (11)$$

где $j = 1,2,\dots,s$, и $\delta > 0$ – некоторая постоянная. Функции q_l будем искать в классе непрерывных функций. Следовательно, потребуем, чтобы

$$a_{ij}^l(t,x_k), a_i^l(t,x_k), a_i^0(t,x_k) \in C([0,T]), (12)$$

при всех $l = r+1,\dots,sr_0+1$, k$= 1,2,\dots,s$, $i,j = 1,2,\dots,n$ и $|\alpha| < 2$

Определим матрицу B размера $sr_0 \times sr_0$ следующим образом: строчки которой с номерами $(j-1)r_0 + 1$ до jr_0 занимают вектор-столбцы

$$\left(-P_0 b_1(0,x_j), \dots, -P_0 b_r(0,x_j), P_0 A_{r+1} u_0(x_j), \dots, P_0 A_{sr_0} u_0(x_j)\right).$$

Потребуем, чтобы

$$|\det B| > 0. (13)$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$B\vec{q}^0 = \vec{g}, \vec{q}^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \dots, q_{sr_0}^0\right), (14)$$

где $\vec{g}$ – вектор-столбец, координаты которого с номерами от $(j-1)r_0 + 1$ до jr_0 представляют собой вектор:

$$P_0\left(f(0, x_j) - A_{sr_0+1}u_0(x_j) - \psi_{jt}(0)\right).$$

При выполнении условия (13) система (14) будет иметь единственное решение: $\vec{q}^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \dots, q_{sr_0}^0\right)$.

Запишем теорему существования решения в следующем виде, используя указанные выше.

Теорема 1

Пусть условия (4)–(6), (9)–(13) выполнены. Пусть оператор $\partial_t + A^0$ *параболичен и для операторов* A_0^0 *и* B_0 *выполнено условие Лопатинского. Тогда для некоторого* $\tau_0 \le T$ *существует единственное решение* $(u, q_1, \dots, q_{sr_0})$ *задачи (1)–(3) из класса*

$$u \in W_p^{1,2}(Q^{\tau_0}) \colon \nabla_x u \in W_p^{1,2}\left(Q_{\delta_2}^{\tau_0}\right), \delta_1 < 0, q_l \in C([0, \tau_0]), l = 1, \dots, sr_0.$$

Запишем следующую теорему, являющуюся теоремой об устойчивости решений. При получении оценок устойчивости будет предполагаться, что условия, приведенные выше, в каком-то смысле равномерны по классу данных, который будет рассматриваться.

Теорема 2

Пусть условия (4)–(6), (9)–(13) выполнены. Положим $(u, \vec{q})$ *– решение задачи (1)–(3), отвечающее данным* $F = (f, \{\psi_j\}_{j=1}^s, u_0, g)$*, удовлетворяющее условиям (9)–(11) из класса, указанного в теореме 1 с некоторым* $\tau_0 \in (0, T]$*. Зафиксируем некоторую* $\delta_2 < \delta_1$*. Тогда найдется* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\tau_1 \le \tau_0$*, такие, что для данных* $(f^1, \{\psi_j^1\}_{j=1}^s, u_1, g^1)$*, удовлетворяющих условиям (9)–(11) и таких, что*

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\left\|f(t, x_j) - f^1(t, x_j)\right\|_{C([0,\tau_0])} + \|u_0 - u_0^1\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G)} + \|f - f^1\|_{L_p(Q^{\tau_0})} + \|\nabla_x(f - f^1)\|_{L_p\left(Q_{\delta_1}^{\tau_0}\right)} \right.$$
$$\left. + \|\nabla_x(u_0 - u_0^1)\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_{\delta_1})} + \left\|\psi_j - \psi_j^1\right\|_{C^1([0,\tau_0])} + \left\|\psi_{jt} - \psi_{jt}^1\right\|_{C^1([0,\tau_0])}\right) \le \varepsilon_0,$$

существует единственное решение задачи (1)–(3) на промежутке $[0, \tau_1]$ *и справедлива оценка устойчивости:*

$$\|u - u^1\|_{W_p^{1,2}(Q^{\tau_1})} + \|\nabla_{x''}(u - u^1)\|_{W_p^{1,2}\left(Q_{\delta_2}^{\tau_1}\right)} + \sum_{j=1}^{sr_0}\left\|q_j - q_j^1\right\|_{C([0,\tau_1])}$$
$$\le c\left(\|u_0 - u_1\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G)} + \|\nabla_x(u_0 - u_1)\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_{\delta_1})} + \|f - f^1\|_{L_p(Q^{\tau_1})} \right.$$
$$+ \|\nabla_x(f - f^1)\|_{L_p\left(Q_{\delta_1}^{\tau_1}\right)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{s}\left(\left\|f(t, x_j) - f^1(t, x_j)\right\|_{C([0,\tau_1])} + \left\|\psi_j - \psi_j^1\right\|_{C^1([0,\tau_1])}\right.$$
$$\left.\left. + \left\|\psi_{jt} - \psi_{jt}^1\right\|_{C^1([0,\tau_1])}\right)\right).$$

Вспомогательные утверждения

При выполнении условий (4), (7), (8) справедлива следующая теорема (смотри теорему 10.4 главы 7 в [4]).

Теорема 3

Пусть G – ограниченная область с границей класса C^2. Тогда, если $g \in L_p(Q^\tau)$ $(\tau \leq T)$, то существует единственное решение $u \in W_p^{1,2}(Q^\tau)$ задачи:

$$u_t + A^0(t,x,D_x)u = f, u|_{t=0} = u_0(x), Bu|_S = g\ ,$$

удовлетворяющее оценке:

$$\| u \|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c\left[\| f \|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{1,2}(S)} + \| u_0 \|_{B_{pp}^{2-\frac{2}{p}}(G)}\right].$$

Лемма 1

Если $u \in W_p^{1,2m}(Q^\tau)$ $(\tau > 0)$, $p > n + 2m$, то производная вида $D_x^\alpha u$ при $|\alpha| \leq 2m - 1$ быть может после изменения на множестве меры ноль, принадлежит $C(\overline{Q^\tau})$, и если $u(0,x) = 0$, то для всех α с $|\alpha| < 2m$ справедлива оценка:

$$\| D^\alpha u \|_{C(\overline{Q^\tau})} \leq c \| u \|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \tau^\beta,$$

где β, c – некоторые положительные постоянные, не зависящие от u и $\tau \in (0,1]$.

Доказательство этой леммы можно найти в [3].

Лемма 2

Пусть условия (4)–(8), (12) выполнены. Пусть также данные $(f, \{\psi_j^1\}_{j=1}^s, u_0, g)$ условиям (4)–(6). Определим вектор-функцию $\vec{q}^{\,0}(t)$ как решение системы (14). Тогда найдется число $\tau_1 \leq T$, такое, что при $\tau \leq \tau_1$ задача

$$u_t + A_0(t,x,D_x)u = g \in L_p(Q^\tau), Bu = 0, u|_{t=0} = 0,$$

где $A_0(t,x,D_x) = \sum_{i=1+1}^{sr_0} q_i^0(t)\, A_i(t,x,D_x) + A_{sr_0+1}(t,x,D_x)$ имеет единственное решение из класса $u \in W_p^{1,2}(Q^\tau)$ и справедлива оценка:

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \leq c\|g\|_{L_p(Q^\tau)},$$

где постоянная c не зависит от данных задачи.

Доказательство леммы несложно провести с использованием следствий теоремы 3.

Доказательство теоремы 1

Пусть u – решение задачи (1)–(2). Установим некоторые оценки. Сделаем замену $q_i(t) = \mu_i(t) + q_i^0(t)$ и $u = v + \Phi$, где Φ – решение следующей задачи.

$$\Phi_t + A_0\Phi = f + \sum_{i=1}^{r} b_i\,(t,x)q_i^0(t),$$

$$\Phi|_{t=0} = u_0(x), B\Phi|_\Gamma = g(t,x),$$

где $A_0 = A_{sr_0+1} + \sum_{i=1}^{r} q_i^0(t)\, A_i$, $j = 1,2,\ldots,s$.

Имеем, что

$$v_t + A_0(t,x,D)v = (A_0 - A)(v + \Phi) + \sum_{i=1}^{r} b_i\,(t,x)\mu_i(t), (t,x) \in Q. (15)$$

$$v|_{t=0} = 0, Bv|_S = 0, (16)$$

$$v(x_j,t) = \tilde{\psi}_j = \psi_j(t) - \Phi(x_j,t) \in C^1([0,T]), \tilde{\psi}_j(0) = \tilde{\psi}_{jt}(0) = 0. (17)$$

Таким образом, свели задачу (1)–(3) к эквивалентной и более простой задаче (15)–(17), которую и будем исследовать. Фиксируя функции $\mu_j \in C([0,\tau])$ и находя решение v задачи

(15)–(16) на интервале $(0,\tau)$, получим отображение $v = v(\vec{\mu})$ ($\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{sr_0})$). Далее изучим его свойства.

Положим $\| \vec{\mu} \|_{C([0,\tau])} = \sum_{i=1}^{sr_0} \| \mu_i \|_{C([0,\tau])}$. Найдем параметр τ_1, указанный в лемме 2. Далее считаем, что $\tau \leq \tau_1$. Используя вспомогательную лемму 2, из (15) получим равенство:

$$v = (\partial_t + A_{sr_0+1})^{-1}(A_{sr_0+1} - A)(v + \Phi) + \\ +(\partial_t + A_{sr_0+1})^{-1} \sum_{i=1}^{r} b_i\,(t,x)\mu_i(t). \qquad (18)$$

Обозначим через H_τ пространство функций из $W_p^{1,2}(Q^\tau)$, удовлетворяющих условиям (16) (граничное условие выполняется на соответствующем интервале $(0,\tau)$). Имеем:

$$\| (\partial_t + A_{sr_0+1})^{-1}(A_{sr_0+1} - A)v \|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \leq c \,\| (A_{sr_0+1} - A)v \|_{L_p(Q^\tau)} \\ \leq cc_1 \| v \|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \| \vec{\mu} \|_{C([0,\tau])},$$

где постоянная c_1 зависит от норм коэффициентов операторов A_i в $L_\infty(Q)$ и не зависит от τ. Выберем шар, в котором мы будем искать решение $\vec{\mu}$. Далее считаем, что

$$\| \vec{\mu} \|_{C([0,\tau])} \leq \frac{1}{2cc_1} = r_1. \, (19)$$

При выполнении этого условия оператор $Sv = (\partial_t + A_{sr_0+1})^{-1}(A_{sr_0+1} - A)v$, $\mathrm{S}: H_\tau \to H_\tau$, в правой части уравнения (18) является сжимающим, и уравнение имеет единственное решение $v \in W_p^{1,2}(Q^\tau)$, удовлетворяющего начально-краевым условиям и оценке

$$\| v \|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \leq c_2(r_1) = R. \, (20)$$

Здесь и далее через $c_i(R)$ обозначаем постоянные, не зависящие от конкретных данных задачи f, g, u_0, ψ_j.

Полученное решение обладает большей гладкостью в областях $Q_{\delta j}^\tau$. Зафиксируем $\delta_2 < \delta_1$. Повторив рассуждения аналогично с [5] и используя лемму 4.6 главы 2 в [6], получим, что обобщенная производная $\partial_{x_i} v$ принадлежит $W_p^{1,2}\left(Q_{\delta_2 j}^\tau\right)$ и удовлетворяет оценке

$$\| v_{x_i} \|_{W_p^{1,2}\left(Q_{\delta_2 j}^\tau\right)} \leq c_3(R). \, (21)$$

В силу произвольности $\delta_2 < \delta_1$, i и j заключаем, что решение v обладает свойством $v_{x_i} \in W_p^{1,2}(Q_{\delta_2 j}^\tau)$ для любого $\delta_2 < \delta_1$, $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, s$. Таким образом, имеем оценку:

$$\| \nabla_x v \|_{W_p^{1,2}\left(Q_{\delta_2 j}^\tau\right)} \leq \tilde{c}_3(R). \, (22)$$

Теперь рассмотрим два решения v_1, v_2 задачи (15)–(16), отвечающие двум различным наборам $\vec{\mu}^i = (\mu_1^i, \mu_2^i, \dots, \mu_{sr_0}^i)$ $(i = 1,2)$ в правой части уравнения (15). Считаем, что для каждого из этих наборов выполнено условие (19). Вычитая второе уравнение из первого, получим, что разность $\omega = v(\vec{\mu}^1) - v(\vec{\mu}^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_t + A_0\omega = \sum_{j=r+1}^{sr_0} (\mu_j^2 - \mu_j^1) A_j(t,x,D)(v_2 + \Phi) \\ - \sum_{j=r+1}^{sr_0} \mu_j^1\, A_j(t,x,D)\omega + \sum_{j=1}^{r} b_j\,(t,x)(\mu_j^1(t) - \mu_j^2(t)). \qquad (23)$$

Можно получить оценку

$$\| \omega \|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \leq c_4(R) \,\| \vec{\mu}^1 - \vec{\mu}^2 \|_{C([0,\tau])}. \, (24)$$

Дифференцируя равенство (22) по переменным x_i, получим также оценку вида:

$$\sum_{j=1}^{s} \| \nabla_{x''}\omega \|_{W_p^{1,2}(Q_{\delta_3 j}^{\tau})} \leq c_5(R) \| \vec{\mu}^1 - \vec{\mu}^2 \|_{C([0,\tau])}, (25)$$

где $\delta_3 < \delta_1$ – произвольное фиксированное число.

Докажем разрешимость задачи. Пусть $v, \vec{\mu}$ – решение задачи (15)–(17) и, таким образом, $v = v(\vec{\mu})$. В силу построения функции Ф (15) можно переписать в виде:

$$v_t + Av = \sum_{i=1}^{r} b_i\,(t,x)\mu_i(t) - \sum_{i=r+1}^{sr_0} \mu_i(t)\,A_i(t,x,D_x)\Phi.$$

Применим P_0 и полагая $x = x_j$ получим:

$$\tilde{\psi}_{jt} - P_0 A \quad v(t,x_j) = P_0 \sum_{i=r+1}^{sr_0} \mu_i\,(t) A_i(t,x_j,D_x)\Phi(t,x_j) - P_0 \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x_j)\mu_i(t)\,. (26)$$

Таким образом, построим систему уравнений для величин μ_i:

$$\vec{\mu}(t) = B_\Phi{}^{-1} H(\vec{\mu})(t) = R(\vec{\mu}), (27)$$

где B_Φ – матрица размера $sr_0 \times sr_0$, строчки которой с номерами $(j-1)r_0 + 1$ до jr_0 занимают вектор-столбцы:

$$\left(-P_0 b_1(t,x_j), \dots, -P_0 b_r(t,x_j), P_0 A_{r+1}\Phi(t,x_j), \dots, P_0 A_{sr_0}\Phi(t,x_j)\right).$$

Имеем, что $B_\Phi(0) = B$, и, значит, без ограничения общности можем считать, что функция det $B_\Phi(t)$ отделена от нуля на промежутке $[0,\tau_1]$, иначе уменьшим параметр τ_1. $H(\vec{\mu})$ – вектор-столбец, координаты которого с номерами от $(j-1)h + 1$ до jh $(j = 1,2,\dots,s)$ есть векторы $\tilde{\psi}_{jt} - P_0 A \quad v(t,x_j)$.

Покажем, что можно найти такое $\tau_2 \leq \tau_1$, что оператор

$$R(\vec{\mu}) = B_\Phi{}^{-1} H(\vec{\mu})(t), R: C([0,\tau_2]) \to ([0,\tau_2]), (28)$$

определен, переводит шар $B_{r_1}(\tau_2) = \{\vec{\mu} \in C([0,\tau_2]) : \| \vec{\mu} \|_{C([0,\tau_2])} \leq r_1\}$ в пространстве $C([0,\tau_2])$ в себя и является в нем сжимающим. Фиксируем $\delta_2 < \delta_1$.

Используя (23), (25), получим неравенство:

$$\| R\left(\overrightarrow{\mu^1}\right) - R\left(\overrightarrow{\mu^2}\right) \|_{C([0,\tau])} \leq c_7(R)\tau^\beta \| \mu^1 - \mu^2 \|_{C([0,\tau])}. (29)$$

Выберем τ_2 такое, что $\sum_{i=1}^{s} \| \tilde{\psi}_{jt} \|_{C([0,\tau_2])}\, c_6 \leq r_1/2$ и $c_7(R)\tau_2^\beta \leq \frac{1}{2}$, где постоянная c_6 – норма оператора $B_\Phi{}^{-1}: C([0,\tau_1]) \to C([0,\tau_1])$. Тогда из (28), (29) вытекает, что оператор R определен, переводит шар $B_{r_1}(\tau_2)$ в себя и является в нем сжимающим. Применяя теорему о неподвижной точке, получим, что в шаре $B_{r_1}(\tau_2)$ существует единственное решение системы (24).

Положим $v = v(\vec{\mu})$. Покажем, что построенная функция удовлетворяет условиям (17). По построению v – решение задачи (15)–(16). Применим P_0 и, полагая $x = x_j$, вместо (15), (16) получим равенства:

$$\tilde{\psi}_t^j - P_0 A \quad v = \sum_{i=1}^{r} P_0\, b_i(t,x_j)\mu_i(t) - \sum_{i=r+1}^{sr_0} \mu_i\,(t) P_0 \left(A_i \Phi(t,x_j)\right)$$

Учитывая (26), получим:

$$\tilde{\psi}_t^j = v_t(t,x_j), j = 1,2,\dots,s.$$

Значит, $\tilde{\psi}^j \equiv v(t,x_j)$ и, следовательно, v удовлетворяет условиям переопределения (17).

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы 2 легко получается с использованием оценок приведенных в доказательстве теоремы 1, мы его опустим.

Литература

1. Ivanchov, M. Inverse problems for equations of parabolic type [Text] / M. Ivanchov. – Lviv : WNTL Publishers, 2003. – 346 p.

2. Pyatkov, S. G. On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations type [Text] / S. G. Pyatkov, B. N. Tsybikov // J. Evol. Equat. – 2011. – Vol. 11. – P. 155–186.

3. Пятков, С. Г. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений [Текст] / С. Г. Пятков, М. Л. Самков // Математические труды. – 2012. – № 15. – С. 155–177.

4. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа [Текст] / А. О. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1967. – 736 с.

5. Пятков, С. Г. Об одной линейной обратной задаче для параболической системы уравнений [Текст] / С. Г. Пятков, Е. М. Короткова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 3. – С. 36–86.

6. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1973. – 576 с.