ВЕСТНИК ЮГОРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 г. Выпуск 3 (50). С. 57–66

DOI: 10.17816/byusu2018057-66
УДК 517.956

В. В. Ротко

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Работа поддержана грантом РФФИ
и Правительством ХМАО–Югры
№ 18-41-860003 р_урал_а.

В работе рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратной задачи об определении функции источников в квазилинейной параболической системе второго порядка. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Главная часть оператора линейна. Неизвестные функции, зависящие от времени, входят в нелинейную правую часть. В том числе, в этот класс задач входят и коэффициентные обратные задачи об определении младших коэффициентов в параболическом уравнении или системе. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения в некотором наборе внутренних точек. В качестве краевых условий берутся условия Дирихле или условия задачи с косой производной. Задача рассматривается в ограниченной области с гладкой границей. Однако результаты допускают обобщения и на случай неограниченных областей таких, в которых соответствующие теоремы о разрешимости прямой задачи имеют место. Приведены условия, гарантирующие локальную по времени корректность задачи в классах Соболева. Условия на данные задачи минимальны. Полученные результаты являются точными. Задача сводится к операторному уравнению, существование решения которого доказывается при помощи априорных оценок и теоремы о неподвижной точке. Полученное решение обладает всеми обобщенными производными, входящими в уравнение и принадлежащими пространству L_p с $p > n + 2$, и обладает необходимой дополнительной гладкостью в некоторой окрестности точек переопределения.

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, тепломассоперенос, краевая задача, функция источников.

V. V. Rotko

INVERSE PROBLEMS FOR MATHEMATICAL MODELS WITH THE POINTWISE OVERDETERMINATION

In the article we examine well-posedness questions in the Sobolev spaces of an inverse source problem in the case of a quasilinear parabolic system of the second order. These problem arise when describing heat and mass transfer, diffusion, filtration, and in many other fields. The main part of the operator is linear. The unknowns occur in the nonlinear right-hand side. In particular, this class of problems includes the coefficient inverse problems on determinations of the lower order coefficients in a parabolic equation or a system. The overdetermination conditions are the values of a solution at some collection of points lying inside the spacial domain. The Dirichlet and oblique derivative problems under consideration. The problems are studied in a bounded domain with smooth boundary. However, the results can be generalized to the case of unbounded domains as well for which the corresponding solvability theorems hold. The conditions ensuring local (in time) well-posedness of the problem in the Sobolev classes are exposed. The conditions on the data are minimal. The results are sharp. The problem is reduced to an operator equation whose solvability is proven with the use of a priori bounds and the fixed point theorem. A solution

possesses all generalize derivatives occurring in the system which belong to the space L_p with $p > n + 2$ and some additional necessary smoothness in some neighborhood about the overdetermination points.

Keywords: parabolic equation, inverse problem, heat-and-mass transfer, boundary value problem, source function.

Введение

Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением функции источника и коэффициентов, характеризующих параметры среды в квазилинейных математических моделях конвекции-диффузии. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$ с границей Г класса C^2 и $Q = (0,T) \times G$. Соответствующая параболическая система имеет вид:

$$Lu = u_t + A(t,x,D)u = f(x,t,u,\nabla u) + \sum_{i=1}^{r} f_i\,(t,x)q_i(t), (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где $A-$ матричный эллиптический оператор вида $A(t,x,D)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(t,x)u_{x_j x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\,u_{x_i} + a_0 u,$ a_{ij}, a_i – $h \times h$ матрицы, $u-$ вектор длины h и $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t))$ – неизвестные функции, подлежащие определению вместе с решением u, которые входят как в правую часть, так и в сам оператор A как коэффициенты. Структуру оператора A мы опишем ниже. Система (1) дополняется начальными и граничными условиями:

$$u|_{t=0} = u_0, Bu|_S = g, S = (0,T) \times \Gamma, \tag{2}$$

где $Bu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\,(t,x)u_{x_i} + \sigma(t,x)u$ или $Bu = u$, n_i – i-я координата внешней единичной нормали к Г и $\gamma_i(t,x), \sigma(t,x)$ матрицы-функции размерности $h \times h$, принадлежащие классу $C^{1/2,2}(\overline{S})$. Условия переопределения записываются в виде:

$$u(x_i,t) = \psi_i(t), i = 1,2, \dots, s, m = hs. \tag{3}$$

Таким образом, дополнительные условия являются данными замеров решения (например, концентрации переносимого вещества) в определенных точках области. Обратная задача состоит в нахождении решения u уравнения (1) и функций $q_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, m)$ по данным (2), (3).

Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях (см. [1]). Большое количество результатов было получено в случае линейной по своим аргументам функции f. Можно отметить работу [2], где получена теорема существования и единственности решений задачи (1)–(3) в пространствах Гельдера в случае $h = 1$, $r = 1$. В случае $n = 1$, $r = 1$ и $G = \mathbb{R}$ некоторые результаты получены в работах [3, 4]. В работах [5, 6] была рассмотрена также и задача об определении младшего коэффициента в параболическом уравнении. Общие теоремы о разрешимости абстрактных задач такого вида в квазилинейном случае получены в монографии [7]. Однако стоит отметить, что результаты [7] применимы к задаче (1)–(3) в случае некоторых специальных функций g и в случае краевых условий, таких, что область определения оператора L не зависит от времени. Однако даже в этом случае в [7] используются излишним условиям гладкости и согласования на данные. Ряд задач, входящих в класс (1), был рассмотрен в работе [8]. Численные методы решения различных модельных задач, входящих в класс (1)–(3), рассматривались, например, в работах [9, 10] и многих других. В частности, в работе [10] численно решалась обратная задача (1)–(3) об определении функции источника для квазилинейной системы параболических уравнений. Наши результаты обобщают результаты работы [14] (см. также [15]). В данной работе мы получим локальную теорему о разрешимости задачи.

Опишем содержание работы. В первом параграфе описаны условия на данные задачи и сформулированы основные результаты. Во втором параграфе приведено их доказательство. Обозначения функциональных пространств стандартные (см., например, [12]).

Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть E – банахово пространство. Символом $L_p(G;E)$ (G – область в $\mathbb{R}^n$) обозначаем пространство сильно измеримых функций, определенных на G, со значениями в E, наделенное нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [12]. Мы также используем пространства Гельдера $C^\alpha(\overline{G})$. Обозначения $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ пространств Соболева являются стандартными (см. определения в [12, 13]). Если $E=\mathbb{C}$ ($E=\mathbb{R}$) или $E=\mathbb{C}^n$ ($E=\mathbb{R}^n$), тогда последнее пространство обозначается через $W_p^s(Q)$. Аналогично используем обозначения $W_p^s(G)$ или $C^\alpha(\overline{G})$ вместо $W_p^s(G;E)$ или $C^\alpha(\overline{G};E)$. Таким образом, включение $u\in W_p^s(G)$ (или $u\in C^\alpha(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u=(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ означает, что каждая из ее компонент u_i принадлежит $W_p^s(G)$ (или $C^\alpha(\overline{G})$). В этом случае норма вектора есть просто сумма норм координат. То же самое соглашение принимаем для матриц-функций. Для интервала $J=(0,T)$ положим $W_p^{s,r}(Q)=W_p^r(J;L_p(G))\cap L_p(J;W_p^s(G))$. Соответственно, $W_p^{s,r}(S)=W_p^r(J;L_p(\Gamma))\cap L_p(J;W_p^s(\Gamma))$. Аналогично определяем пространство Гельдера $C^{r,s}(\overline{Q})$.

Пусть $B_\delta(x_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке x_i. Далее мы используем следующие обозначения: $Q^\tau=(0,\tau)\times G$, $S^\gamma=(0,\gamma)\times\Gamma$. Дан набор точек $\{x_j\}$ из (3), параметр $\delta>0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(x_i)}\subset G$, $\overline{B_\delta(x_i)}\cap\overline{B_\delta(x_j)}=\emptyset$ для $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,r$. Пусть $G_\delta=\cup_i B_\delta(x_i)$, $Q_\delta=(0,T)\times G_\delta$, $Q_\delta^\tau=(0,\tau)\times G_\delta$.

Рассмотрим задачу (1), (2) и сформулируем один вспомогательный результат. Мы будем предполагать, что у нас выполнены условия.

Условия на коэффициенты:

$$a_{ij}\in C(\overline{Q}), a_k\in L_p(Q), \gamma_i,\sigma\in C^{1/2,2}(\overline{S}), p>n+2; \tag{4}$$

$$a_{ij}\in L_\infty\left(0,T;W_p^s(G_\delta)\right), a_k\in L_p(0,T;W_p^s(G_\delta)), i,j=1,2,\ldots,n, k=0,1,\ldots,n, \tag{5}$$

для некоторого допустимого $\delta>0$ и $s\in\left(\frac{n+2}{p},1\right]$. Опишем условия параболичности оператора L. Рассмотрим матрицу $A_0(t,x,\xi)=-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ ($\xi\in\mathbb{R}^n$) и предположим, что найдется постоянная $\delta_1>0$, такая, что корни p полинома $\det(A_0(t,x,i\xi)+pE)=0$ (E – единичная матрица) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}p\le-\delta_1|\xi|^2\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n\ \forall(x,t)\in Q. \tag{6}$$

Пусть $B_0u=u$ в случае условий Дирихле в (2) и $B_0u=\sum_{j=1}^n\gamma_j\,\partial_{x_j}u$ в противном случае. Условие Лопатинского может быть записано в виде: для любой точки $(t_0,x_0)\in S$, и операторов $A(x,t,D)$ и $B_0(x,t,D)$, записанных в локальной системе координат y в этой точке (ось y_n направлена по нормали к S и оси $y_1,\ldots,y_{n-1}$ лежат в касательной плоскости в точке (x_0,t_0)), система

$$(\lambda E+A_0(x_0,t_0,i\xi',\partial_{y_n}))v(z)=0, B_0(x_0,t_0,i\xi',\partial_{y_n})v(0)=h_j, \tag{7}$$

где $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$, $y_n\in\mathbb{R}^+$, имеет единственное решение из $C\left(\overline{\mathbb{R}}^+\right)$, ограниченное на бесконечности при всех $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda|\le\pi/2$, и $h_j\in\mathbb{C}$ таких, что $|\xi'|+|\lambda|\neq0$. Мы также предполагаем, что

$$\begin{gathered}u_0(x)\in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G), g\in W_p^{2k_0,k_0}(S),\\ B(x,0)u_0(x)|_\Gamma=g(x,0)\ \forall x\in\Gamma,\end{gathered} \tag{8}$$

где $k_0=1-1/2p$ в случае условия Дирихле и $k_0=1/2-1/2p$, в противном случае

$$\begin{gathered}u_0(x)\in W_p^{2+s-\frac{2}{p}}(G_\delta)\text{ для некоторого допустимого }\delta>0\text{ и}\\ s\in((n+2)/p,1].\end{gathered} \tag{9}$$

Даны постоянные $\delta_1 < \delta_2 < \delta$. Построим вспомогательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(G_\delta)$, такую, что $\varphi \equiv 1$ в области G_{δ_1} и $\varphi \equiv 0$ в $G_\delta \setminus G_{\delta_2}$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)–(9) для некоторого допустимого $\delta > 0$ и $s \in ((n+2)/p, 1]$, $f \in L_p(Q^\tau)$, $f\varphi \in L_p(0,\tau; W_p^s(G_\delta))$ и $\tau \in (0, T]$. Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{2,1}(Q^\tau)$ задачи:

$$Lu = u_t + Au = f\ ((x,t) \in Q), u|_{t=0} = u_0(x), Bu|_S = g. \tag{10}$$

Причем $\varphi u_t \in L_p(0,\tau; W_p^s(G_\delta))$, $\varphi u \in L_p(0,\tau; W_p^{2+s}(G_\delta))$. *Если* $g \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$, *то справедлива оценка:*

$$\begin{gathered}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\tau)} + \|\varphi u_t\|_{L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))} + \|\varphi u\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2+s}(G_\delta))} \leq \\ c[\|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|\varphi f\|_{L_p(0,\tau;W_p^s(G_\delta))}],\end{gathered} \tag{11}$$

где постоянная c *не зависит от* f, *решения* u *и* $\tau \in (0, T]$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы может быть найдено в работе [17, Теоремы 1, 2]. Основное утверждение теоремы известно, см., например, [13]. Дополнительная гладкость по существу вытекает из известных результатов о внутренней гладкости решений параболических и эллиптических задач.

Основные результаты

Рассматривается уравнение

$$u_t + Au = f(x,t,u,\nabla u) + \sum_{i=1}^{r} f_i\,(x,t)q_i(t) + f_0(x,t). \tag{12}$$

Мы рассматриваем задачу (1)–(3) о восстановлении правой части уравнения вида $f = \sum_{i=1}^{r} f_i\,(x,t)q_i(t) + f_0(x,t)$ и коэффициентов, в частности входящих в главную часть уравнения (1). Предположим, что оператор A имеет вид:

$$A = L_0 - \sum_{k=r+1}^{m} q_k\,(t)L_k,$$

$$L_k u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k\,(t,x)u_{x_j x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^k\,(t,x)u_{x_i} + a_0^k(t,x)u,$$

где $k = 0, r+1, r+2, \ldots, m$. Поскольку неизвестные могут встречаться в главной части уравнения, мы будем искать их в классе $C([0,T])$. Построим матрицу $B(t)$ размерности $m \times m$, чьи строки с числами с $(j-1)h + 1$ по jh занимают вектор-столбцы:

$$(f_1(x_j,t), f_2(x_j,t), \ldots, f_r(x_j,t), L_{r+1}u_0(x_j), \ldots, L_m u_0(x_j)).$$

Мы предполагаем, что

$$\begin{gathered}\psi_j \in C^1([0,T]), u_0(x_j) = \psi_j(0) (j = 1,2,\ldots,s,), \\ \gamma_i, \sigma \in C^{1/2,2}(\overline{S}), p > n+2,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}a_{ij}^k \in C(\overline{Q}) \cap L_\infty\left(0,T; W_p^s(G_\delta)\right), a_l^k \in L_p(Q) \cap L_p\left(0,T; W_p^s(G_\delta)\right) \\ (i,j = 1,\ldots,n, l = 0,1,\ldots n),\end{gathered} \tag{14}$$

$$f_i \in L_p(Q) \cap L_p(0,T; W_p^s(G_\delta))\ (i = 1,\ldots,m), \tag{15}$$

для некоторого допустимого $\delta > 0$, $s > (2+n)/p$, и $k = 0, r+1, \dots, m$;

$$a_i^k(x_l, t), f_a(x_l, t) \in C([0,T]) \tag{16}$$

для всевозможных значений i, j, k, l, a. Также необходимо выполнение следующего условия:

Условие (A). Существует число $\delta_0 > 0$, такое, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0 \text{ на} (0,T).$$

Заметим, что элементы матрицы B принадлежат $C([0,T])$. Рассмотрим систему

$$\psi_{jt}(0) + L_0 u_0(x_j, 0) - f\left(0, x_j, u_0(x_j), \nabla u_0(x_j)\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} q_{0k} f_k(x_j, 0) + \sum_{k=r+1}^{m} q_{0k} L_k u_0(x_j)$$

по отношению к вектору $\vec{q}_0 = (q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0m_1})$. При выполнении условия (A) система имеет единственное решение. Обозначим $A_0 = L_0 - \sum_{k=r+1}^{m} q_{0k} L_k$. Пусть B_R – шар радиуса R с центром в нуле в $\mathbb{R}^{(n+1)h}$.

Условие (B). Функция $f(t,x,u,p)$ непрерывна по совокупности переменных ($u, p \in \mathbb{R}^{(n+1)h}$), для любого $R > 0$ найдется постоянная $M_0 > 0$, такая, что

$$|f(t,x,u^1,p^1) - f(t,x,u^2,p^2)| \leq M_0(|u_1 - u_2| + |p_1 - p_2|),$$

для всех $(u^1,p^1), (u^2,p^2) \in B_R$, $f(t,x,u,p) \in C([0,T] \times \overline{B_R}; W_p^s(G_\delta))$.

Условие (C). Функция $f(t,x,u,p)$ дифференцируема по параметрам $(u,p) \in \mathbb{R}^{(n+1)h}$ при п.в. $(t,x) \in Q_\delta$ и

$$f_u(t,x,u,p), f_{p_i}(t,x,u,p) \in C([0,T] \times \overline{B_R}; W_p^s(G_\delta))\ \forall R > 0,$$

для любого $R > 0$ найдутся функции $\Phi_1(t,x), \Phi_2(t,x) \in C\left([0,T]; L_p(G)\right)$, такие, что

$$\|f_u(t,x,u^1,p^1) - f_u(t,x,u^2,p^2)\|_{L(\mathbb{R}^h)} \leq$$
$$\leq |\Phi_1(t,x)||u_1 - u_2| + |\Phi_2(t,x)||p^1 - p^2|,$$

$$\|f_{p_i}(t,x,u^1,p^1) - f_{p_i}(t,x,u^2,p^2)\|_{L(\mathbb{R}^h)} \leq$$
$$\leq |\Phi_1(t,x)||u_1 - u_2| + |\Phi_2(t,x)||p^1 - p^2|$$

для всех $(u^1,p^1), (u^2,p^2) \in B_R$. Здесь величины f_u, f_{p_i} $(i = 1,2,\dots,n)$ – соответствующие матрицы Якоби и $\|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^h)}$ – норма в пространстве линейных непрерывных отображений из $\mathbb{R}^h$ в $\mathbb{R}^h$.

При указанных условиях теорема существования примет следующий вид.

Теорема 2. Пусть условия (A)-(C), (13)–(16) выполнены. Предположим также, что оператор $M_0 = \partial_t + A_0$ параболический и выполнено условие Лопатинского, т. е. условия (6), (7) выполнены. Тогда найдется число $\tau_0 \in (0,T]$, такое, что на промежутке $[0,\tau_0]$ существует единственное решение $(u, q_1, q_2, \dots, q_m)$ задачи (1)–(3), такое, что $u \in L_p(0,\tau_0; W_p^2(G))$, $u_t \in L_p(Q^{\tau_0})$, $q_i(t) \in C([0,\tau_0])$, $i = 1,\dots,m$. Кроме того, $\varphi u \in L_p(0,\tau_0; W_p^{2+s}(G))$, $\varphi u_t \in L_p(0,\tau_0; W_p^s(G))$.

Доказательство. Найдем решение задачи.

$$\Phi_t + A_0\Phi = \sum_{k=1}^{r} q_{0i} f_i\ ((x,t) \in Q), \Phi|_{t=0} = u_0(x), B\Phi|_S = g. \tag{17}$$

По теореме 1 $\Phi \in W_p^{2,1}(Q)$, $\varphi\Phi_t \in L_p(0,T; W_p^s(G))$, $\varphi\Phi \in L_p(0,T; W_p^{2+s}(G))$. Из теоремы III 4.10.2 в [11] вытекает, что $\varphi\Phi \in C([0,T]; W_p^{2+s-2/p}(G)) \subset C([0,T]; C^{2+s-2/p-n/p}(\overline{G}))$. Следовательно, $\varphi\Phi \in C([0,T]; C^2(G))$. Из уравнения (17) вытекает, что $\Phi_t(x_j, t) \in C([0,T])$. Сделаем замену переменных $\vec{q} = \vec{q}_0 + \vec{q}_1$ и $u = v + \Phi$ в (1). Получим новую задачу:

$$Lv = v_t + A_0 v - \sum_{k=r+1}^{m} q_{1k} L_k v =$$

$$= f(t, x, v + \Phi, \nabla v + \nabla\Phi) + \sum_{i=1}^{r} f_i q_{1i} + \sum_{i=r+1}^{m} q_{1i} L_i \Phi = F, \tag{18}$$

$$v|_{t=0} = 0, Bv|_S = 0,$$

$$v(x_j, t) = \tilde{\psi}(t) = \psi_j(t) - \Phi(x_j, t) \in C^1([0,T]), \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}_t(0) = 0. \tag{19}$$

Стандартные теоремы о разрешимости параболических задач гарантируют локальную разрешимость задачи (18) при фиксированном векторе $\vec{q}_1$. Однако у нас используются специальные классы данных и решений. Поэтому мы наметим доказательство. Определим пространство $H_{0,\tau} = \{u \in W_p^{1,2}(Q_\tau)\colon \varphi u_t \in L_p(0,\tau; W_p^s(G)), \varphi u \in L_p(0,\tau; W_p^{2+s}(G))\}$. В качестве нормы в этом пространстве возьмем величину

$$\|u\|_{H_{0,\tau}} = \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)} + \|\varphi u_t\|_{L_p(0,\tau; W_p^s(G))} + \|\varphi u\|_{L_p(0,\tau; W_p^{2+s}(G))}.$$

Используя теорему 1, можем сказать, что решение $u \in H_{0,\tau}$ задачи (18) есть решение операторного уравнения:

$$v = M_0^{-1} f(t, x, v + \Phi, \nabla v + \nabla\Phi) +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{m} M_0^{-1} q_{1k} L_k v + M_0^{-1} \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k(t,x) q_{1k}(t), \tag{20}$$

где $M_0 u = u_t + A_0 u$, $\tilde{f}_k = f_k$ при $k \le r$ и $\tilde{f}_k = L_k \Phi$ при $k > r$. Зафиксируем параметр $s_1 \in (s, \min(1, 1 - (n+2)/p + s))$, введем обозначения

$$\|g\|_{V(0,\tau)} = \|g\|_{L_p(0,\tau; L_p(G))} + \|g\varphi\|_{L_p(0,\tau; W_p^s(G))},$$

$$\|v\|_{0,\tau} = \|v\|_{C([0,\tau; C^1(\overline{G}))} + \|\varphi v\|_{C([0,\tau]; C^{1+s_1}(\overline{G}))}.$$

Теорема 1, условия на функции f_i и неравенство Гельдера гарантируют оценку

$$\|M_0^{-1} \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k(t,x)(q_k^1(t) - q_k^2(t))\|_{H_{0,\tau}} \le c_0 \|\vec{q}^{\,1} - \vec{q}^{\,2}\|_{C([0,\tau])}, \tag{21}$$

где c_0 – постоянная, не зависящая от параметра τ. Пусть $\|\vec{q_1}\|_{C([0,\tau])} \le r_0$. Аналогично, используя условия на коэффициенты, получим:

$$\|M_0^{-1} \sum_{k=r+1}^{m} q_{1k} L_k v\|_{H_{0,\tau}} \le c_1 r_0 \|v\|_{H_{0,\tau}}. \tag{22}$$

Уравнение (20) можно переписать в виде:

$$v = R(v) + f_0, f_0 = M_0^{-1} \sum_{k=1}^{m} \tilde{f}_k(t,x) q_{1k}(t). \tag{23}$$

Покажем, что если параметр r_0 достаточно мал, то на малом промежутке времени уравнение (23) разрешимо в классе $H_{0,\tau}$. Фиксируем параметр $r_0 \le 1/4c_1$ и шар $B^{r_0} = \{\vec{q} \in$

$C([0,\tau])\colon \|\vec{q}\|_{C([0,\tau])} \le r_0\}$. Фиксируем также шар $B_{R_0} = \{v \in H_{0,\tau}\colon \|v\|_{H_{0,\tau}} \le R_0\}$ с $R_0 = 2(\|R(0)\|_{H_{0,\tau}} + c_1 r_0)$. Получим оценки. Пусть $v_i \in B_{R_0}$ $(i = 1,2)$. Имеем, используя теорему 1, условия на f и (22), что

$$\|R(v_1) - R(v_2)\|_{H_{0,\tau}} \le c_3\|v_1 - v_2\|_{0,\tau} + c_1 r_0\|v_1 - v_2\|_{H_{0,\tau}}. \tag{24}$$

При оценке нормы $\|f(t,x,v_1+\Phi,\nabla v_1+\nabla\Phi) - f(t,x,v_2+\Phi,\nabla v_2+\nabla\Phi)\|_{V_{0,\tau}}$ используем неравенства:

$$\|f(t,x,v_1+\Phi,\nabla v_1+\nabla\Phi) - f(t,x,v_2+\Phi,\nabla v_2+\nabla\Phi)\|_{L_p(0,\tau)} \le$$
$$\le c_4\|v_1 - v_2\|_{C\left([0,T];C^1(\overline{G})\right)}, \tag{25}$$

вытекающее из условия (B), и неравенство

$$\|\varphi(f(t,x,v_1+\Phi,\nabla v_1+\nabla\Phi) - f(t,x,v_2+\Phi,\nabla v_2+\nabla\Phi))\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^s(G)\right)}$$
$$\le c_5\|v_1 - v_2\|_{0,\tau}, \tag{26}$$

где постоянные c_i не зависят от τ. Чтобы получить последнее неравенство, используем представление:

$$f(t,x,v_2(t,x+h)+\Phi(t,x+h),\nabla(v_2(t,x+h)+\Phi(t,x+h))) -$$
$$f(t,x,v_1(t,x+h)+\Phi(t,x+h),\nabla(v_1(t,x+h)+\Phi(t,x+h))) =$$
$$\int_0^1 f_u\,(t,x,v_1(t,x+h)+\tau\Delta v,\nabla(v_1(t,x+h)+\tau\Delta v(t,x+h)))\cdot\Delta v(t,x+h) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} f_{p_i}\,(t,x,v_1+\tau\Delta v,\nabla(v_1+\tau\Delta v))\cdot\Delta v_{x_i}(t,x+h)\,d\tau, \Delta v = v_2 - v_1,$$

$$f(t,x,v_2(t,x)+\Phi(t,x),\nabla(v_2(t,x)+\Phi(t,x)))$$
$$-f(t,x,v_1(t,x)+\Phi(t,x),\nabla(v_1(t,x)+\Phi(t,x)))$$
$$= \int_0^1 f_u\,(t,x,v_1(t,x)+\tau\Delta v(t,x),\nabla(v_1+\tau\Delta v)(t,x))\cdot\Delta v$$
$$+\sum_{i=1}^{n} f_{p_i}\,(t,x,v_1+\tau\Delta v,\nabla(v_1+\tau\Delta v))\Delta v_{x_i}\,d\tau$$

и определение нормы в пространстве $W_p^s(G)$. Оценим правые части в (25), (26). Теорема III 4.10.2 в [11] гарантирует, что $v \in C([0,\tau];W_p^{2-2/p}(G))$ (класс $W_p^{1,2}(Q^\tau)$ вложен в $C([0,\tau];W_p^{2-2/p}(G))$) и что $\varphi v \in C([0,\tau];W_p^{2-2/p+s}(G))$. Можем считать, что постоянные вложения в обоих случаях не зависят от τ (поскольку четное продолжение (относительно точки τ) на промежуток $[0,2\tau]$ и далее нулем сохраняет норму и класс $H_{0,\tau}$ для функций v, которые обращаются в ноль при $t = 0$). Используя теоремы вложения (см. теорему 4.6.2 в [12]) и интерполяционные неравенства, а также формулу Ньютона-Лейбница, имеем:

$$\|v\|_{C([0,\tau];C^1(\overline{G}))} \le c_6\|v\|_{C([0,\tau];W_p^{1+n/p}(G))} \le\le c_7\|v\|^{\theta}_{C([0,\tau];W_p^{2-2/p}(G))}\|v\|^{1-\theta}_{C([0,\tau];L_p(G))} \le$$
$$\le c_8\|v\|^{\theta}_{C([0,\tau];W_p^{2-2/p}(G))}\|v_t\|^{1-\theta}_{L_p(Q^\tau)}\tau^{(1-\theta)(1-1/p)} \le \tag{27}$$
$$\le c_9\|v\|^{\theta}_{C([0,\tau];W_p^{2-1/p}(G))}\|v_t\|^{1-\theta}_{L_p(Q^\tau)}\tau^{(1-\theta)(1-1/p)} \le\le c_{10}\|v\|_{H_{0,\tau}}\tau^{\beta},$$

где $\theta = (p+n)/(2p-2)$, $\beta = (1-\theta)(1-1/p)$ и постоянные c_i не зависят от τ и v. Оценим второе слагаемое, входящее в норму $\|v\|_{0,\tau}$. Аналогично имеем:

$$\|\varphi v\|_{C([0,\tau];C^{1+s_1}(\bar{G}))} \le c_{11}\|\varphi v\|_{C([0,\tau];W_p^{1+n/p+s_1}(G))}$$
$$\le c_{12}\|\varphi v\|^{\theta_1}_{C([0,\tau];W_p^{2-2/p+s}(G))}\|v_t\|^{1-\theta_1}_{L_p(Q^\tau)}\tau^{(1-\theta_1)(1-1/p)} \le \tag{28}$$
$$\le c_{13}\|\varphi v\|^{\theta_1}_{C([0,\tau];W_p^{2-2/p+s}(G))}\|v_t\|^{1-\theta_1}_{L_p(Q^\tau)}\tau^{(1-\theta_1)(1-1/p)} \le\le c_{14}\|v\|_{H_{0,\tau}}\tau^{\beta_1},$$

где $\theta_1 = (1+n/p+s_1)/(2+s-2/p)$, $\beta_1 = (1-\theta_1)(1-1/p)$ и постоянные c_i не зависят от τ и v. Таким образом, используя (27), (28), оценку (24) можно переписать в виде

$$\|R(v_1)-R(v_2)\|_{H_{0,\tau}} \le c_{15}\tau^\beta\|v_1-v_2\|_{H_{0,\tau}} + c_1 r_0\|v_1-v_2\|_{H_{0,\tau}}, \tag{29}$$

где постоянные c_i не зависят от τ и $\beta > 0$ – некоторая постоянная.

Выберем τ_0 такое, что

$$\tau_0^\beta c_{15} \le 1/4, c_{15} = c_{15}(R_0),$$

тогда оператор R удовлетворяет оценке

$$\|R(v_1)-R(v_2)\|_{H_{0,\tau}} \le \|v_1-v_2\|_{H_{0,\tau}}/2\ \forall v_i \in B_{R_0}, \tau \le \tau_0, \overrightarrow{q_1} \in B^{r_0}. \tag{30}$$

В частности, имеем неравенство

$$\|R(v)-R(0)\|_{H_{0,\tau}} \le \|v\|_{H_{0,\tau}}/2\ \forall v \in B_{R_0}, \tau \le \tau_0, \overrightarrow{q_1} \in B^{r_0}. \tag{31}$$

Из (23) вытекает неравенство

$$\|R(v)+f_0\|_{H_{0,\tau}} \le \|v\|_{H_{0,\tau}}/2 + R_0/2 \le R_0, \forall v \in B_{R_0}, \tag{32}$$

которое гарантирует, что отображение $R(v)+f_0$ переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. По теореме о неподвижной точке получим, что уравнение (23) разрешимо. Получим необходимую оценку. Пусть v_1, v_1 два решения, отвечающие двум различным векторам $\vec{q}_i = (q_1^i, \dots, q_m^i)$ $(i = 1,2)$, из шара B^{r_0}. Таким образом,

$$v_j = M_0^{-1}\Big(f(t,x,v_j+\Phi,\nabla v_j+\nabla\Phi) - \sum_{k=r+1}^m q_k^j L_k v_j + \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i(t,x)q_i^j(t)\Big). \tag{33}$$

Вычитая два уравнения (33) и используя полученные выше оценки, мы выводим

$$\|v_1-v_2\|_{H_{0,\tau}} \le c_{16}\|\vec{q}^{\,1}-\vec{q}^{\,2}\|_{C([0,\tau])}, \tag{34}$$

где постоянная c_{16} не зависит от τ.

Пусть $v \in H_{0,\tau}$. Полагая $x = x_j$ в (18), мы придем к системе равенств

$$\tilde{\psi}_{jt} + A_0 v(t,x_j) - \sum_{k=r+1}^m q_{1k} L_k v(t,x_j) =$$
$$= f(t,x_j,v(t,x_j)+\Phi(t,x_j),\nabla(v+\Phi)(t,x_j)) + \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i(t,x_j)q_{1i}(t), \tag{35}$$

где $j = 1,\dots,s$. Эта система может быть переписана в виде $B\vec{q} = \vec{\psi} + \tilde{R}(\vec{q})$, где координаты векторов $\vec{\psi}$ и $R(\vec{q})$ с номерами от $(j-1)h+1$ до jh совпадают с векторами $\widetilde{\psi_j}_t - f(t,x_j,\Phi(t,x_j),\nabla\Phi(t,x_j))$ и $A_0 v(t,x_j) - \sum_{k=r+1}^m q_{1k} L_k v(t,x_j) - f(t,x_j,v(t,x_j)+$

$\Phi(t,x_j), \nabla v(t,x_j)+\nabla\Phi(t,x_j))+f(t,x_j,\Phi(t,x_j),\nabla\Phi(t,x_j))$, соответственно. В оператор $\tilde{R}$ входит функция $v=v(\vec{q})$, которая определяется через функцию $\vec{q}$ как решение задачи (18). Таким образом, приходим к системе

$$\vec{q}=B^{-1}\vec{\psi}+B^{-1}\tilde{R}(\vec{q}), \tag{36}$$

где оператор $B^{-1}\tilde{R}(\vec{q}): C([0,\tau]\to C([0,\tau]$ ограничен. Более того, он удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке на некотором малом промежутке времени. Получим оценки.

Отметим, что по построению $\vec{\psi}_t|_{t=0}=0$. Следовательно, найдется параметр $\tau_1\le\tau_0$, такой, что

$$\|\vec{\psi}\|_{C([0,\tau])}\le r_0/2\ \forall\tau\le\tau_0. \tag{37}$$

Пусть $\vec{q_i}\in C([0,\tau])$ два вектора из шара B^{r_0} и v_1, v_1 – соответствующие решению задачи (18). Далее имеем, что ($\omega=v_1-v_2$)

$$\|B^{-1}\tilde{R}(\overrightarrow{q_1})-B^{-1}\tilde{R}(\overrightarrow{q_1})\|_{C([0,\tau])}\le\gamma_1(\sum_{j=1}^{r}(\sum_{|\alpha|\le2}\|D^\alpha\omega(x_j,t)\|_{C([0,\tau]}+$$

$$+\|f(t,x,v_1+\Phi,\nabla v_1+\nabla\Phi)(t,x_j))-f(t,x,v_2+\Phi,\nabla v_2+\nabla\Phi)(t,x_j))\|_{C([0,\tau])}).$$

Далее, используя теоремы вложения и оценки (25), (26), оценим правую часть этого неравенства через

$$\gamma_2\|\varphi\omega\|_{C([0,\tau];W_p^{s_3+2}(G))}+\|\omega\|_{0,\tau}, s_3\in(n/p,2-2/p).$$

Используя рассуждения из доказательства оценок (29) и вышеприведенные неравенства, аналогично получим оценку

$$\|B^{-1}\tilde{R}(\overrightarrow{q_1})-B^{-1}\tilde{R}(\overrightarrow{q_1})\|_{C([0,\tau])}\le\gamma_3\tau^\beta\|v_1-v_2\|_{H_{0,\tau}}, \tag{38}$$

где постоянная γ_3 не зависит от τ и β – некоторая положительная постоянная. Выберем $\tau_2\le\tau_1$, такое, что $\gamma_3\tau_2^\beta\le 1/2$. При таком выборе τ_2 оператор $B^{-1}\tilde{R}(\vec{q})$ будет сжимающим и будет переводить шар B^{r_0} в себя. Следовательно, уравнение (36) разрешимо.

Пусть v есть соответствующее решение задачи (18). Покажем, что полученные решения $(v,\vec{q})$ есть решение обратной задачи (18), (19) эквивалентной нашей. Действительно, полагая $x=x_j$ в (18), придем к равенствам

$$v_t(t,x_j)+A_0v(t,x_j)-\sum_{k=m+1}^{m_1}q_{1k}\,L_kv(t,x_j)=$$

$$=f(t,x_j,v(t,x_j)+\Phi(t,x_j),\nabla(v+\Phi)(t,x_j))+\sum_{i=1}^{m_1}\tilde{f}_i\,(t,x_j)q_{1i}(t).$$

Вычитая эти равенства из (35), получим $v(t,x_j)=\tilde{\psi}(t)$. Единственность решений задачи (18), (19) вытекает из полученных в процессе доказательства оценок.

Литература

1. Marchuk, G. I. Mathematical Models in Environmental Problems [Text] : V. 16: Studies in Mathematics and its Applications / G. I. Marchuk. –Amsterdam : Elsevier Science Publishers, 1986. – 217 p.
2. Прилепко, А. И. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа [Текст] / А. И. Прилепко, В. В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 10. – С. 1791–1799.

3. Afinogenova, O. A. Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for a one-dimensional parabolic equation [Text] / O. A. Afinogenova, Yu. Ya. Belov, I. V. Frolenkov // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 79, 1. – P. 70–72.

4. Белов, Ю.Я. О задаче и дентификации функциии счточника для уравнения типа Бюргерса [Текст] / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2012. – 5(4). – P. 497–506.

5. Кулиев, М. А. Многомерная обратная задача для параболического уравнения в ограниченной области [Текст] / М. А. Кулиев // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – № 14. – С. 138–145.

6. Прилепко, А. И. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении [Текст] / А. И. Прилепко, В. В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, 1. – С. 136–143.

7. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics [Text] / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – New-York Marcel Dekker Inc, 1999. – 709 p.

8. Пятков, С. Г. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений [Текст] / С. Г. Пятков, М. Л. Самков // Математические труды. – 2012. – Т. 15, 1. – С. 155–177.

9. Ozisik, M. N. Inverse Heat Transfer [Text] / M. N. Ozisik, H. R. B. Orlande. – New York : Taylor & Francis, 2000. – 314 p.

10. Mamonov, A. V. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems [Text] / A. V. Mamonov, Y-H. R. Tsai // Inverse Problems. – 2013. – V. 29, 3. – 26 p.

11. Amann, H. Linear and quasilinear parabolic problems [Text] : V. 1 Abstract Linear Theory / H. Amann. – Berlin ; Boston ; New-York : Birkhäuser, 1995. – 342 p.

12. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы [Текст] / Х. Трибель. – Москва : Мир, 1980. – 664 с.

13. Denk, R. Optimal Lp-Lq-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data [Text] / R. Denk, M. Hieber, J. Pruss // Math. Z. – 2007. – V. 257, □1. – P. 193–224.

14. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – Москва : Наука, 1967. – 736 с.

15. Пятков, С. Г. Об определении функции источника в квазилинейных параболических задачах с точечными условиями переопределения [Текст] / С. Г. Пятков, В. В. Ротко // Вестник ЮУрГУ. Серия«Математика. Механика. Физика». – 2017.– Т. 9. – № 4. – С. 19–26.

16. Pyatkov, S. G. On some parabolic inverse problems with the pointwise over determination [Electronic resource] / S. G. Pyatkov, V. V. Rotko // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V. 1907. – URL: https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5012619.

17. Pyatkov, S. G. On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination [Text] / S. G. Pyatkov, V. V. Rotko // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V. 1907. – P. 020008.